This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

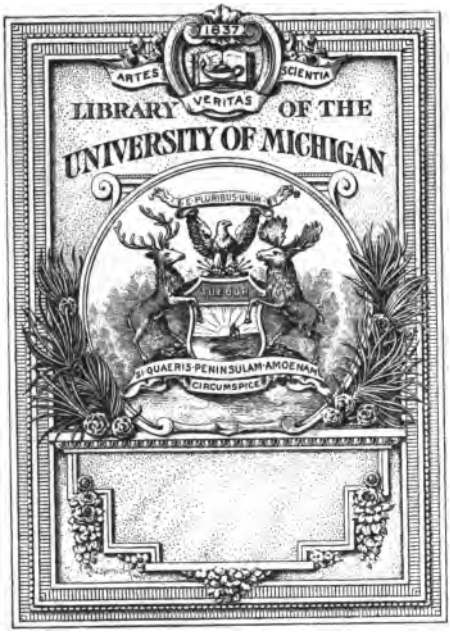
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Mathematics
QA
1
.J88

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

74412

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie d'Aix
Ex-Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe

ET

KŒHLER
Ancien répétiteur à l'École polytechnique
Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe

AVEC LA COLLABORATION

DE MM.

AUG. MOREL ET COCHEZ
Professeurs de mathématiques.

TOME TROISIÈME

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15
1879.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

THÉORIE DES AXES RADICAUX

Par M. A. Morel.

(*Suite* et *fin*, voir tome 2, pages 353.)

XXXIX. **Théorème.** — *Les cercles qui coupent sous le même angle trois cercles donnés ont le même axe radical.*

En effet, lorsque l'on considère trois cercles égaux, les cercles qui les coupent sous le même angle sont concentriques, et nous avons démontré (32) que la figure inverse d'un système de cercles concentriques est un système de cercles ayant même axe radical. On connaît deux points de cette droite dans le cas général, le centre radical et le centre de l'un des cercles tangents. Par conséquent, le lieu des centres des cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles égaux, se compose de quatre droites qui sont les perpendiculaires abaissées du centre radical sur les quatre axes de similitude.

On peut encore le démontrer de la façon suivante : Tout cercle qui coupe deux cercles sous le même angle, ne change pas dans l'inversion de l'un des cercles dans l'autre. Donc il est orthogonal à l'un des cercles bissecteurs. Par conséquent, si un cercle coupe trois cercles sous le même angle, il est orthogonal aux trois cercles bissecteurs de ces cercles pris deux à deux, et il a pour centre un point de leur axe radical.

XL. **Théorème de Hart.** — *Les huit cercles tangents à trois cercles donnés sont, quatre par quatre, tangents aux six*

cercles obtenus par l'inversion de l'un d'eux, lorsque les deux autres cercles se transforment l'un dans l'autre.

En effet, les quatre cercles tangents aux cercles 1 et 2 à la fois intérieurement ou extérieurement, ne changent pas lorsqu'on prend pour cercle d'inversion le cercle bissecteur des cercles 1 et 2, et le troisième se transforme en un cercle tangent à ces quatre cercles.

XLI. Nous avons vu (19, 4°) que la longueur de la tangente commune à deux cercles était proportionnelle au sinus ou au cosinus du demi-angle de ces deux cercles. C'est pour cela que certains géomètres, et en particulier M. Casey, ont considéré la tangente commune de deux cercles au lieu de l'angle que font ces deux cercles. Cette considération a permis à ce géomètre de trouver la condition que doivent remplir quatre cercles pour être tangents à un cinquième cercle.

La comparaison de la valeur qui donne l'angle de deux cercles (10) avec la longueur qui donne le carré de la tangente commune (19, 4°), nous montre que, puisque les angles, réels ou imaginaires, de deux cercles, se conservent dans l'inversion, *si l'on considère deux cercles quelconques et leurs inverses, le rapport de la tangente commune à la moyenne géométrique du rayon est le même pour les deux couples.*

XLII. Cela posé, considérons quatre cercles tangents à un même cercle, et prenons pour pôle d'inversion un point de ce dernier cercle. La figure se transformera alors en un système de quatre cercles tangents à une droite, inverse du cinquième cercle. Appelons a, b, c, d les points de contact, sur cette droite, des cercles dont les rayons sont ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4. On aura pour les quatre points a, b, c, d situés sur une droite (*Voir* Desboves, *Quest. de géom.*, 2e édit., page 28):

$$ab \,.\, cd + ad \,.\, bc = ac \,.\, bd.$$

En mettant les doubles signes, pour tenir compte des cas où les tangentes communes peuvent être d'espèces différentes, faisant passer tout dans le premier membre et divisant par

$$\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}$$

il vient

$$\frac{ab}{\sqrt{\rho_1\rho_2}} \cdot \frac{cd}{\sqrt{\rho_3\rho_4}} \pm \frac{ad}{\sqrt{\rho_1\rho_4}} \cdot \frac{bc}{\sqrt{\rho_2\rho_3}} \pm \frac{ac}{\sqrt{\rho_1\rho_3}} \cdot \frac{bd}{\sqrt{\rho_2\rho_4}} = 0.$$

En appliquant le théorème précédent, on aura, lorsque quatre cercles sont tangents à un même cinquième cercle, la relation suivante :

$$\frac{AB}{\sqrt{r_1r_2}} \cdot \frac{CD}{\sqrt{r_3r_4}} \pm \frac{AD}{\sqrt{r_1r_4}} \cdot \frac{BC}{\sqrt{r_2r_3}} \pm \frac{AC}{\sqrt{r_1r_3}} \cdot \frac{BD}{\sqrt{r_2r_4}} = 0.$$

C'est dans cette formule que consiste le théorème de M. Casey. On peut supprimer les dénominateurs, et on a alors une relation entre les longueurs des tangentes communes des cercles pris deux à deux d'un système de quatre cercles tangents à un cinquième cercle.

XLIII. **Théorème.** — *Le rapport des distances circulaires d'un point à deux cercles ne change pas par l'inversion.*

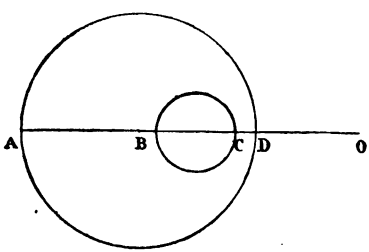
En effet, si par ce point et les deux points d'intersection des cercles donnés on fait passer un cercle, on sait (16) que le rapport des distances circulaires du point aux deux cercles est le rapport des sinus des angles que fait ce cercle avec les deux cercles donnés. Or, par l'inversion, les angles des cercles ne changent pas. Donc les trois cercles se transformeront en trois cercles passant par les mêmes points et comprenant entre eux les mêmes angles. Le rapport des distances angulaires d'un point de l'inverse du cercle auxiliaire aux inverses des deux autres cercles sera encore égal au rapport des sinus; il sera donc le même que précédemment.

XLIV. **Théorème.** — *La figure inverse d'une anallagmatique est une anallagmatique.* — Soit O le pôle, M et M′ deux points réciproques de la figure anallagmatique, et o le cercle de *reproduction* (c'est-à-dire le cercle par rapport auquel M et M′ sont réciproques). Dans l'inversion, les deux points M et M′ deviennent m et m'. Mais tout cercle passant par les points M et M′ coupe orthogonalement le cercle de reproduction. Donc, le cercle quelconque MM′ se transforme en un cercle mm' qui coupe orthogonalement l'inverse du cercle de reproduction. Donc les deux points quelconques

m et m' sont toujours réciproques par rapport à l'inverse du cercle de reproduction.

XLV. Soient deux cercles concentriques de rayons α et β; il est facile de voir que le rayon d'un cercle tangent à ces deux cercles est $\frac{\alpha - \beta}{2}$, et que la distance de son centre au centre des deux cercles est $\frac{\alpha + \beta}{2}$. Si l'on a $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \sin \frac{\pi}{n}$, on pourra décrire un anneau de n cercles tangents à ces deux cercles, chacun d'eux étant tangent au précédent et au suivant, et de plus, si le problème est possible une fois, il est possible d'une infinité de manières, en ce que l'on peut prendre le point de contact du premier cercle où l'on veut. M. H. M. Taylor, dans le *Messenger of Mathematics* (fév. 1878), a, par la méthode d'inversion, cherché à résoudre la même question pour deux cercles non concentriques, mais intérieurs, et nous allons donner ici sa solution de cette question, en la complétant par une construction géométrique.

Considérons deux cercles concentriques de rayons α et β satisfaisant à la condition précédente et prenons la figure inverse par rapport à un point O dont la distance au centre commun est d. Soit μ le module d'inversion; appelons a et b les rayons des cercles transformés, c la distance de leurs centres; si l'on mène la ligne des centres, qui passe par le point o, on a



(1) $OA = \frac{\mu^2}{d - \alpha} = x + 2a$; (2) $OB = \frac{\mu^2}{d - \beta} = x + a - c + b$.

(3) $OC = \frac{\mu^2}{d + \beta} = x + a - c - b$; (4) $CD = \frac{\mu^2}{d + \alpha} = x$.

avec $$\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \sin \frac{\pi}{n},$$

ou $$(5)\quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 + \sin\frac{n}{\pi}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}} = m.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, $\mu = 1$, et éliminons entre ces cinq équations les quantités d, α, β, x.

Les équations (1) et (4), par addition et soustraction, donnent

$$(6)\quad \frac{\alpha}{d^2-\alpha^2} = a; \qquad (7)\quad \frac{d}{d^2-\alpha^2} = x + a.$$

De même, des équations (2) et (3), on tire

$$(8)\quad \frac{\beta}{d^2-\beta^2} = b; \qquad (9)\quad \frac{d}{d^2-\beta^2} = x + a - c.$$

Retranchant membre à membre les équations (7) et (9), il vient $$\frac{d}{d^2-\alpha^2} - \frac{d}{d^2-\beta^2} = c.$$

En substituant les valeurs tirées des équations (6) et (8), il vient $$\frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} = \frac{c}{d}.$$

On en tire (10) $c = \frac{d}{\alpha}(a - mb)$;

$$(11)\quad c = \frac{d}{\beta}\left(\frac{a}{m} - b\right).$$

Enfin, des équations (6), (8), (10), (11), on tire

$$\frac{\alpha b}{a\beta} = \frac{mb}{a} = \frac{d^2-\alpha^2}{d^2-\beta^2} = \frac{1-\left(\frac{\alpha}{d}\right)^2}{1-\left(\frac{\beta}{d}\right)^2}$$

$$= m^2\,\frac{c^2-(a-mb)^2}{c^2m^2-(a-mb)^2}.$$

En effectuant et divisant par $a - bm$, qui n'est pas nul,

$$mc^2 = (a - bm)(am - b).$$

En remplaçant m par sa valeur, on trouve

$$\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)c^2 = (a-b)^2 - \sin^2\frac{\pi}{n}(a+b)^2.$$

D'où $$\sin^2\frac{\pi}{n} = \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2 - c^2}.$$

Si donc le second membre est égal au carré du sinus d'un arc sous-multiple de π, le problème sera possible.

On sait d'ailleurs que pour transformer deux cercles en cercles concentriques, on doit prendre pour pôle un des points limites du système des deux cercles.

Si l'on remplace $\frac{\pi}{n}$ par $\frac{h\pi}{n}$, on obtiendra la condition de l'existence de n cercles tangents, entourant h fois le cercle intérieur des deux cercles donnés. Il est facile de remarquer que les centres de tous ces cercles sont sur une ellipse ayant pour foyers les centres des deux cercles donnés. Soit, en effet, γ le rayon d'un cercle tangent extérieurement au pétit cercle et intérieurement au grand. La distance de son centre au centre du grand cercle est $a - \gamma$; la distance au centre du petit cercle est $b + \gamma$. La somme de ces deux rayons est constante, et égale à $a + b$.

Cherchons une interprétation géométrique de cette condition. On sait que, par l'inversion, les angles se conservent. Prenons une position particulière pour l'un des cercles tangents, le cas où les points de contact sont sur la ligne des centres. Alors, si nous prenons la figure inverse, le pôle étant le point limite extérieur du système des deux cercles, nous aurons deux cercles concentriques, et un cercle tangent sur la ligne qui va du centre au pôle d'inversion. Le rayon qui passe par les centres, et par suite par le pôle, se transforme en lui-même; le rayon tangent au cercle solution se transforme en un cercle tangent au cercle considéré, et passant par les points limites. On sait construire ce cercle, qui passe par deux points et est tangent à un cercle. Pour que le problème soit possible, il faudra que l'angle que fait ce cercle avec sa corde soit une portion aliquote de la circonférence, ou si l'on veut, que la ligne qui joint les points limites soit le côté du polygone régulier de n côtés inscrit dans cette circonférence que l'on construit d'après les conditions précédentes.

NOTE SUR LE SECOND DEGRÉ

par M. **Kliszowski**, professeur au Prytanée militaire.

Quand un problème conduit à une équation du second degré ou à une équation bicarrée, et que l'inconnue reconnue réelle est assujettie à être comprise entre certaines limites, on est souvent embarrassé soit pour le vérifier, soit surtout pour trouver simplement les conditions qui doivent exister entre les paramètres pour qu'il en soit ainsi.

La plupart du temps on écrit que l'inconnue, si c'est un sinus par exemple, est en valeur absolue <1; si c'est une corde de circonférence, qu'elle est <2 R, etc., et on a une inégalité à vérifier ou à résoudre.

Les calculs sont longs, souvent le paramètre entre sous un radical qu'on est alors obligé de faire disparaître par l'élévation au carré, et comme cette opération n'est pas toujours permise, il faut poser des équations de condition qui compliquent encore la question. Je proposerai la méthode suivante :

Principe. — Lorsque les racines d'un trinôme du second degré en x dont le coefficient du terme en x^2 est positif sont réelles et inégales, toute valeur comprise entre les racines substituée à la place de la variable rend le trinôme négatif, toute valeur en dehors des racines le rend positif.

La réciproque est vraie.

Si la substitution d'un nombre à la place de x donne un résultat négatif, ce nombre est compris entre les racines; si elle donne un résultat positif, ce nombre est en dehors des racines.

Supposons donc qu'un problème conduise à une équation du second degré, les racines de l'équation sont réelles; mais l'inconnue doit être comprise entre a et b.

Je substitue a, je substitue b. J'ai deux résultats de signe contraire; j'affirme alors qu'il y a une racine et une seule comprise entre a et b.

J'obtiens deux résultats de même signe, il y a alors entre les deux nombres deux racines, ou il n'y en a pas. Pour distinguer ce qui se passe, je remonte à l'équation et les quantités représentant la somme des racines ou le produit me montreront toujours dans quel cas on se trouve.

Remarque. — Si les racines de l'équation sont égales, la difficulté disparaît puisqu'il n'y a plus de radicaux.

Exemples : 1° *Déterminer sur le diamètre d'une sphère une longueur* AI *telle qu'en menant un plan perpendiculaire à ce diamètre, le volume du cône* CBD *soit équivalent à* m *fois le volume de la calotte sphérique* CAD.

AI $= x$ Eq. du problème

$$x^2 (m + 1) - Rx (4 + 3m) + 4R^2 = 0.$$

Les racines sont toujours réelles ; on le vérifie facilement. x doit être compris entre 0 et 2R.

$$0 \text{ donne } + 4R^2,$$
$$2R \text{ donne } - 2R^2m$$

donc il y a une racine et une seule comprise entre 0 et 2R.

2° *Circonscrire à une sphère un cône tel que le rapport de la surface totale à la surface de la sphère soit égal à un nombre donné* m.

Prenons pour inconnue x, la hauteur du cône.

$$\text{Eq. } x^2 - 4Rmx + 8R^2m = 0.$$

Les racines sont réelles si $m \geq 2$.

Supposons cette condition remplie. Les deux racines sont positives et pour qu'elles conviennent il faut qu'elles soient $> 2R$.

Je substitue 0 et 2R

$$0 \text{ donne } + 8R^2m,$$
$$2R \text{ donne } + 4R^2m;$$

donc les deux racines sont ou toutes deux $< 2R$ ou toutes deux $> 2R$; mais $m > 2$, la somme des racines est $> 8R$; il faut donc que les deux racines soient toutes deux $> 2R$. Les deux solutions conviennent donc.

3° *Étant donné un tronc de prisme triangulaire droit, on demande de mener par l'une des arêtes un plan qui le partage en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés* p. q.

(*Ecole forestière 1869.*)

$$\frac{\text{Vol ACIDEH}}{\text{Vol ABCDEF}} = \frac{p}{p+q},$$

$$\text{IH} = x,$$

$$\text{Eq.}\, x^2 + ax - \frac{bq\,(a+b) + pc\,(a+\text{C})}{p+q}.$$

Les deux racines sont réelles; une est positive, l'autre est négative. La positive doit être comprise entre b et c. Or, la substitution de b et de c donne des résultats de signe contraire, donc la racine positive convient toujours au problème.

4° $$\text{Sin}^2 x + \sin x - 11 = 0;$$

les racines sont réelles; une est positive, l'autre est négative. Elles doivent être en valeur absolue < 1.

0 donne —,

1 donne —;

donc les deux racines sont comprises toutes deux entre 0 et 1 ou il n'y en a pas. Or, comme il y a une racine négative, c'est qu'il n'y en a pas entre 0 et 1.

Même conclusion pour 0 et -1.

Donc, l'équation n'admet aucune racine.

5° $$\text{Sin}^2 x - 3m \sin x + m = 0.$$

Supposons d'abord $m < 0$ et posons $m = -m'$.

$$\text{Sin}^2 x + 3m' \sin x - m' = 0.$$

Les deux racines sont réelles; une est positive, l'autre est négative : 0 donne $-m'$,

1 donne $+1 + 2m'$; donc une racine entre 0 et 1.

0 donne —,

-1 donne $1 - 4m'$.

Si donc $1 - 4m'$ est < 0, il y aura une racine entre 0 et 1; si $1 - 4m'$ est < 0, il n'y en aura pas, car il ne peut y en avoir deux.

En résumé, si m est < 0, il y a toujours une racine positive, et la racine négative ne convient que si $m \geqq -\frac{1}{4}$.

Supposons $m > 0$.

Les racines seront réelles si $m \geqq \frac{4}{9}$. Supposons cette

condition remplie, les racines sont toujours positives; elles conviendront si elles sont comprises entre o et 1.

o donne $+$,
1 donne $1 - 2m$.

Si $1 - 2m$ est < 0, c'est-à-dire si $m > \frac{1}{2}$, il y a une racine et une seule qui convient. Si $m < \frac{1}{2}$, il y en a deux ou pas, mais il y en a nécessairement deux, puisque le produit est m, c'est-à-dire $< \frac{1}{2}$ et on sait que deux nombres > 1 donneraient un produit > 1.

m

$-\infty$ — $-\frac{1}{4}$ — 0 — $\frac{4}{9}$ — $\frac{1}{2}$ — $+\infty$

1 rac. 2 rac. rien 2 rac. 1 rac.

Application.

$$2\sin^2 x - (3m + 1)\sin x + 4m - 2 = 0.$$

On suivra la même marche.

Les racines seront réelles si $9m^2 - 26m + 16 > 0$, c'est-à-dire si $m > 18$ ou $m < 8$.

1° Supposons $m > 18$, les deux racines de l'équation sont positives; elles conviendront si elles sont comprises entre o et 1.

o donne $+$,
1 donne $m - 1$, c'est-à-dire $+$.

Les deux racines sont donc comprises entre o et 1, ou elles ne le sont pas. Or la somme est $> \frac{55}{2}$, donc les deux racines sont toutes deux > 1.

2° $m < 8$.

Dans ce cas le produit des racines peut être négatif ou positif, suivant le signe de $4m - 2$.

Si $4m - 2$ est > 0, c'est-à-dire si $m > \frac{1}{2}$, les deux racines sont toutes deux positives :

o donne $+$,
1 donne $m - 1$.

Si m est < 1 il y a une racine, et une seule; si m est > 1, il y en a deux ou aucune. Mais dans ce cas, le produit des racines étant > 1, il n'y en a pas.

Supposons $4m - 2 < 0$, c'est-à-dire $m < \frac{1}{2}$; une racine est positive, l'autre est négative,

$$\begin{array}{ll} 0 \text{ donne } -, & \\ 1 & m - 1 \text{ c. à d. } -; \end{array}$$

donc il y aurait deux racines ou aucune; mais comme nous savons qu'il ne peut y avoir qu'une racine positive, il n'y en a pas de positive.

$$\begin{array}{ll} 0 \text{ donne } -, & \\ -1 & 7m + 1; \end{array}$$

si $m > -\frac{1}{7}$, il y aura une racine comprise entre 0 et 1.

Si $m < -\frac{1}{7}$ le raisonnement précédent montre qu'il n'y en a pas.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & m & & & & & \\ -\infty & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 8 & 18 & +\infty \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{rien}} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{1 \text{ racine}} & & \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{rien}} & & & \end{array}$$

L'équation bicarrée se ramenant à une équation du second degré, la discussion est la même.

NOTE DE GEOMÉTRIE

DE LA DIRECTRICE DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE

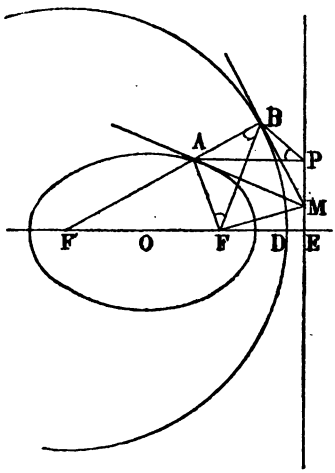
par M. **Malloizel**.

1° *Ellipse.* — Proposons-nous de trouver le lieu suivant:

Lieu géométrique. — F *et* F′ *sont les foyers d'une ellipse et* F′D *le cercle directeur décrit du foyer* F′ *comme centre. Par le point* F′, *on mène une sécante* F′AB *et par les points* A *et* B *de rencontre avec l'ellipse et le cercle les tangentes à ces deux courbes, on demande de trouver le lieu géométrique du point de ren-*

contre M *de ces tangentes, lorsque la sécante* F'AB *tourne autour du point* F'.

Menons FA et FM, les deux triangles ABM et FAM sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux : FAM = MAB puisque AM est la tangente, AM commun et FA = AB d'après la propriété connue du cercle directeur. On en déduit FM = MB. Le lieu du point M est donc le lieu des points d'où on peut mener à deux circonférences des tangentes égales, l'une d'elles est le cercle directeur et l'autre est réduite à son centre F. Ce lieu est une perpendiculaire à la ligne des centres EF' dont le pied E est distant du point O, milieu de EF' d'une longueur $OE = \frac{\overline{F'B}^2}{2FF'} = \frac{4a^2}{4c} = \frac{a^2}{c}$, en désignant par $2a$ le grand axe de l'ellipse et par $2c$ la distance FF' des deux foyers.



Cette droite s'appelle *directrice de l'ellipse* correspondante au foyer F.

Tous les points de l'ellipse jouissent de la propriété suivante par rapport au foyer et à la directrice correspondante.

Théorème. — *Le rapport des distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer et à la directrice est constant et égal à* $\frac{c}{a}$.

Soit A un point de l'ellipse, AP la perpendiculaire abaissée sur la directrice; il faut démontrer que $\frac{AF}{AP}$ est constant. Menons BP et BF, les deux triangles ABP et BFF' sont semblables; en effet : les angles en A et F' sont égaux comme

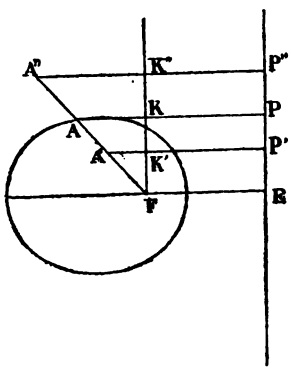
correspondants, et l'angle en P est égal à FBF′ comme étant tous deux égaux à l'angle AFB; P = AFB comme ayant la même mesure dans la circonférence décrite sur AM comme diamètre et FBF′ = AFB comme angles du triangle isoscèle ABF.

Les deux triangles sont donc semblables et on a : $\frac{AB}{AP} = \frac{FF'}{F'B} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$, et comme AB = FA, $\frac{FA}{AP} = \frac{c}{a}$; c. q. f. d.

— Le rapport $\frac{c}{a}$ s'appelle *excentricité*.

Remarque. — Pour tout point A′ intérieur à l'ellipse $\frac{A'F}{A'P'} < \frac{c}{a}$, pour tout point extérieur à l'ellipse A″, $\frac{A''F}{A''P''} > \frac{c}{a}$.

1° Je dis que $\frac{A'F}{A'P'} < \frac{AF}{AP}$, ou $\frac{A'F}{AF} < \frac{A'P'}{AP}$; car en menant FK′KK″ parallèle à la directrice $\frac{A'F}{AF} = \frac{A'K'}{AK}$, et il est évident que $\frac{A'K'}{AK} < \frac{A'P'}{AP}$.



2° $\frac{A''F}{A''P''} < \frac{AF}{AP}$, ou $\frac{A''F}{AF} < \frac{A''P''}{AP}$; car $\frac{A''F}{AF} = \frac{A''K''}{AK}$ et il est évident que $\frac{A''K''}{AK} > \frac{A''P''}{AP}$.

— On en déduit cette définition nouvelle de l'ellipse :

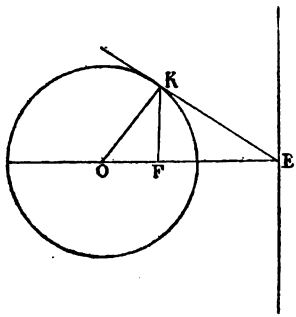
L'ellipse est le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite est constant et plus petit que l'unité.

— L'ellipse a une seconde directrice correspondante au

foyer F'. Elle est symétrique de la première par rapport au centre.

Construction des directrices :

Décrivons un cercle sur le grand axe comme diamètre, et menons la perpendiculaire à cet axe au foyer F. Elle coupe le cercle au point K et la tangente en K coupe l'axe au pied de la directrice; en effet $OE = \frac{OK^2}{OF} = \frac{a^2}{c}$.



Remarque. — On déduit facilement du premier problème, en remarquant que l'angle AFM est droit, le théorème suivant :

Théorème. — *Si d'un point* M *de la directrice d'une ellipse on mène des tangentes à la courbe, la ligne qui joint les points de contact passe par le foyer correspondant et est perpendiculaire à la ligne qui joint le foyer au point* M.

2° *Hyperbole.* — Tout ce que nous avons dit sur l'ellipse s'applique à l'hyperbole qui a deux directrices comprises entre le centre et les sommets, car $\frac{a^2}{c} < a$, puisque $a < c$. Et on peut définir l'hyperbole : *le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite est constant et plus grand que* 1.

L'excentricité $\frac{c}{a}$ est plus grande que l'unité.

3° *Parabole.* — On connaît la définition de la parabole, l'excentricité = 1.

— On peut donc donner des trois sections coniques la définition commune suivante :

Le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant est une ellipse, une parabole ou une

hyperbole, suivant que le rapport est plus petit que l'unité, égal à l'unité ou plus grand que l'unité.

Le point fixe est un foyer et la droite fixe la directrice correspondante.

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES

par **Georges Dostor**.

---

1. Prenons une progression arithmétique quelconque

$$\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ldots,$$

que nous supposerons croissante et à termes entiers; et soit r la raison de cette progression.

Cherchons s'il est possible d'y déterminer n termes consécutifs, dont la somme S soit égale à une puissance entière n^a du nombre n.

Si x est le premier de ces n termes, le dernier de ces termes sera $x + (n - 1)r$, et l'on aura

$$S = \frac{2x + (n - 1)r}{2} . n$$

pour la somme des n termes.

Nous devons ainsi avoir l'égalité

$$\frac{2x + (n - 1)r}{2} . n = n^a,$$

d'où nous tirons

$$(1) \qquad x = n^{a-1} - \frac{(n - 1)}{2} r$$

pour la valeur du premier de nos n termes.

Deux cas sont à considérer, suivant que la raison r est un nombre pair ou un nombre impair.

2. Premier cas. Si la raison r est paire et égale à $2q$, le problème sera toujours possible; le premier de nos n termes sera $x = n^{a-1} - (n - 1)q$,

et $y = n^{a-1} + (n - 1)q$

sera le dernier de ces termes. La somme S des n termes aura pour valeur

$$S = \frac{n^{a-1} - (n-1)\,q + n^{a-1} + (n-1)\,q}{2} \,.\, n$$

$$= \frac{2n^{a-1} \,.\, n}{2} = n^a \,.$$

Nous en concluons que

Théorème I. — *Dans toute progression arithmétique à termes entiers, dont la raison est* paire, *on peut toujours trouver* n *termes consécutifs, dont la somme soit égale à une puissance entière donnée de* n (*le nombre entier* n *étant quelconque*).

Les termes extrêmes de cette suite de n termes seront

$$n^{a-1} - (n-1)\,\frac{r}{2} \text{ et } n^{a-1} + (n-1)\,\frac{r}{2},$$

où r désigne la raison paire de la progression.

3. Supposons que notre progression soit formée par la suite 1, 3, 5, 7, 9, . . .
des nombres impairs. Les termes extrêmes des n termes en question seront

$$n^{a-1} - n + 1 \text{ et } n^{a-1} + n - 1,$$

attendu que $r = 2$. Donc

Théorème II. — *Une puissance entière quelconque* n^a, *d'un nombre entier quelconque* n, *est toujours égale à la somme de* n *nombres impairs consécutifs.*

4. Nous voyons ainsi que le cube d'un nombre entier n, est égal à la somme des n nombres impairs consécutifs
$n^2 - n + 1$, $n^2 - n + 3$, $n^2 - n + 5$,... $n^2 + n - 1$.

Si nous donnons à n successivement les valeurs entières

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,. . .,

nous obtiendrons les égalités

$$1^3 = 1,$$
$$2^3 = 3 + 5,$$
$$3^3 = 7 + 9 + 11,$$
$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19, \text{ etc. Donc}$$

Théorème III. — *Si l'on prend la suite des nombres impairs* 1, 3, 5, 7, . . ., *et qu'on la sépare en groupes, dont le*

premier ait un terme, le second deux termes..., le n^me^ *groupe* n *termes ; la somme des termes d'un même groupe est égale au cube du nombre des termes que renferme ce groupe.*

5. Deuxième cas. Si la raison r est impaire, l'inspection de la valeur (1) fait voir que le problème ne sera possible que pour les valeurs impaires $2p + 1$ de n. Le premier (1) de nos n termes sera alors

$$x = (2p + 1)^{a-1} - pr,$$

et

$$y = (2p + 1)^{a+1} + pr$$

sera le dernier de ces termes. On voit donc que

Théorème IV. — *Dans toute progression arithmétique dont la raison est impaire, on peut toujours trouver un nombre impair* $n = 2p + 1$ *de termes consécutifs, dont la somme soit égale à une puissance entière donnée de* n.

6. Si notre progression est formée par la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . .
nous aurons $r = 1$ et les termes extrêmes de notre groupe de $n = 2p + 1$ termes seront

$$(2p + 1)^{a-1} - p \text{ et } (2p + 1)^{a-1} + p.$$

Faisons $a = 2$ et donnons à p successivement les valeurs

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . ,

nous obtiendrons les développements

$$1^2 = 1,$$
$$3^2 = 2 + 3 + 4,$$
$$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7,$$
$$7^2 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10, \text{ etc.}$$

Si nous faisons $a = 3$, et que nous donnions à p les mêmes valeurs successives, nous trouverons que

$$1^3 = 1,$$
$$3^3 = 8 + 9 + 10,$$
$$5^3 = 23 + 24 + 25 + 26 + 27,$$
$$7^3 = 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + 51 + 52, \text{ etc.}$$

REMARQUE SUR LA NOTE PRÉCÉDENTE.

Nous croyons devoir compléter la note qui précède en signalant les résultats intéressants communiqués en 1855 par M. Wheatstone à la *Société Royale de Londres.*

Dans cette communication, l'auteur a démontré que l'on peut, par l'addition de n termes consécutifs d'une progression arithmétique, reproduire *de diverses façons* la même puissance a du nombre n. — Nous indiquerons simplement les résultats suivants :

1° Chaque carré n^2 pourra s'obtenir en faisant la somme des n premiers nombres impairs, résultat connu et signalé plus haut.

2° Chaque carré n^2 peut s'obtenir en faisant la somme de n termes d'une progression arithmétique commençant par $\frac{n+1}{2}$ et ayant pour raison l'unité. — On en déduit, comme il est démontré plus haut, que le carré de tout nombre impair est la somme d'autant de nombres entiers consécutifs qu'il y a d'unités dans sa racine.

3° Le cube de n s'obtient en faisant la somme de n termes d'une progression arithmétique commençant par l'unité et ayant pour raison $2(n+1)$.

4° Le cube de n s'obtient en faisant la somme de n termes d'une progression arithmétique commençant par n et ayant pour raison $2n$.

5° On obtient aussi le cube de n en faisant la somme de n premiers termes d'une progression arithmétique commençant par $n^2 - n + 1$ et ayant 2 pour raison.

6° On peut encore ajouter les n premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est $\frac{n^2+n}{2}$ et la raison n. Chacun des termes de cette progression est lui-même la somme de n termes d'une progression arithmétique.

7° On aura le cube de n en faisant la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est $(n-2)^2$ et la raison 8.

Pour les puissances supérieures à 3, nous nous bornerons à l'exemple suivant :

Toute puissance 4e est la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est n^2, et la raison $2n^2$.

L'énoncé du 5e cas nous amène à démontrer simplement que : *La somme des cubes des* n *premiers nombres est égale au carré de la somme des* n *premiers nombres.* Car, si l'on prend la suite des nombres impairs

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. . . .

que l'on sépare le premier, les deux suivants, les trois qui viennent après, et ainsi de suite, le premier terme du n^e groupe en aura avant lui un nombre marqué par $n\frac{(n-1}{2}$; donc sa valeur sera $n_2 - n + 1$. Dans la somme des termes compris dans ce groupe sera n^3. Il en résulte que la somme des n premiers groupes sera la somme des termes de la progression $\div$ 1, 3, 5, 7, ... $(n^2 + n - 1)$.

Mais on sait que la somme des p premiers nombres impairs est égale au carré de p, et comme le nombre des termes sera égal à la somme des nombres naturels de 1 à n, d'après la manière dont est formé chaque groupe, on voit bien que la somme des n premiers cubes est égale au carré de la somme des n premiers nombres.

A. M.

NOTE SUR UN PROBLÈME CLASSIQUE

Par **Émile Lemoine,** ancien élève de l'École polytechnique.

Dans presque tous les traités de géométrie que les élèves ont entre les mains, se trouve comme application des théorèmes du *troisième livre* le problème suivant :

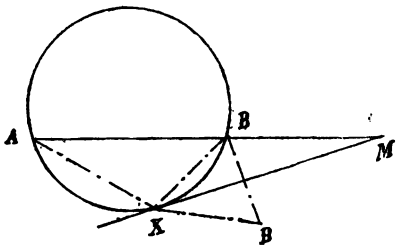
Construire une circonférence passant par deux points donnés A *et* B *et tangente à une droite donnée.*

Je crois qu'on n'a pas remarqué la solution que je vais indiquer ici et qui n'exige que l'emploi de théorèmes du second livre. Supposons le problème résolu :

Soit X le point de contact; soit M le point d'intersection de AB avec la tangente donnée; soit B′ le symétrique de B par rapport à MX, menons AX, BX, B′X.

On a :

$$AXB' = AXM + MXB'$$
$$= AXM + MXB = AXM + XAM = 180 - XMA.$$



Le point X s'obtiendra donc en décrivant sur AB' un segment capable de 180 — XMA.

Cette construction s'est présentée comme cas particulier du problème suivant :

Construire une circonférence passant par deux points A et B et coupant une droite donnée MX sous un angle donné ω. Nous indiquerons seulement la construction à effectuer, laissant aux élèves le soin de la démonstration : soit B' le symétrique de B par rapport à MX. Appelons X un des points d'intersection de la circonférence cherchée avec la droite MX;

On décrit sur AB' *un segment capable de la différence entre* ω *et l'angle que la droite* AB *fait avec* MX; *ce segment capable coupe la droite* MX *au point* X.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

La circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier inscrit ou d'un polygone régulier circonscrit dont on double indéfiniment le nombre de côtés.

Pour démontrer ce théorème, je remarque d'abord que, si je prends deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit à la même circonférence, cette courbe est comprise entre les périmètres de ces deux polygones. De plus, lorsque l'on double indéfiniment le nombre des côtés, le périmètre du polygone inscrit va en augmentant, tandis que le périmètre du polygone circonscrit va en diminuant.

Cela posé, je dis que les périmètres de ces deux polygones semblables ont un rapport qui tend vers l'unité, et par suite, puisqu'ils comprennent entre eux la circonférence, ils tendent l'un et l'autre vers cette courbe.

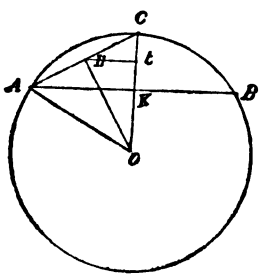
En effet, en appelant R et r le rayon et l'apothème du polygone régulier inscrit, P et p les périmètres des deux polygones semblables, l'un circonscrit, l'autre inscrit, on a

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}.$$

Soient P', p' les nouveaux périmètres, r' le nouvel apothème, on a encore $\frac{P'}{p'} = \frac{R}{r'}$.

Je dis que la différence $R - r'$ est moindre que $R - r$, et qu'elle tend vers zéro lorsque l'on double indéfiniment le nombre des côtés.

Pour le prouver, considérons le côté AB du polygone régulier de n côté inscrits, le côté AD du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés. L'arc AC étant plus petit que l'arc AB, la corde AC est plus petite que la corde AB, et par suite l'apothème OH est plus grand que OK. Je dis en outre qu'il a pour limite le rayon. Pour le prouver, menons HL perpendiculaire sur OC ; on a, dans le triangle rectangle OHC :



$$OH^2 = OL \,.\, OC = R \times \left(\frac{R + r}{2}\right).$$

Donc $R^2 - r'^2 = R^2 - R\left(\frac{R + r}{2}\right) = \left(\frac{R - r}{2}\right) R.$

Par suite

$$R - r' = \frac{R}{R + r'} \,.\, \frac{R - r}{2}, \text{ ou } R - r' < \frac{R - r}{2}.$$

On aurait de même

$$R - r'' < \frac{R - r'}{2} < \frac{R - r}{4}.$$

Et, après n opérations

$$R - r_n < \frac{R - r}{2^n}.$$

Or, le second membre tend vers zéro. Il en est donc de même du premier, et par suite, à la limite

$$R = r_n; \text{ donc } P_n = p_n.$$

Le théorème est donc démontré. A. M.

CONCOURS GÉNÉRAUX

CONCOURS DE 1861

Classe de troisième (sciences).

— Construire un triangle semblable à un triangle donné, et dont les trois sommets soient situés respectivement sur trois droites données.

— Les côtés d'un triangle sont : $a = 32^m$
$b = 28^m$
$c = 22^m$.

Calculer à un millimètre près les distances des trois sommets au point de rencontre des droites qui joignent les sommets au milieu des côtés opposés.

Classe de seconde (sciences).

— Deux circonférences égales se coupent en deux points A et B. Par le point A, on mène une sécante APQ qui coupe les deux circonférences en P et Q. On propose d'évaluer la surface BPQ comprise entre les deux arcs BP, BQ et la droite PQ, et de démontrer que cette surface est proportionnelle au carré de PQ.

— Simplifier $$\frac{ab\,(x^2 + y^2) + xy\,(a^2 + b^2)}{ab\,(x^2 - y^2) + xy\,(a^2 - b^2)}.$$

Classe de rhétorique (sciences).

— Résoudre

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Classe de logique (lettres).

— Trouver dans le plan d'un triangle un point tel que la somme des carrés des distances de ce point aux trois sommets soit la plus petite possible.

Classe de logique (sciences).

— Étant donnés deux points fixes A et B, on trace une droite OP faisant avec AB un angle φ quelconque; on trace une droite OP' perpendiculaire à OP, et on prend sur OP et OP' deux points M et M' tels que chacune des sommes MA + MB, M'A + M'B soit égale à une longueur donnée $2a$; puis

on achève le rectangle OMM'N. On demande à quelle valeur de l'angle φ répondent le maximum et le minimum de l'aire du rectangle. (Le point O est le milieu de AB.)

— Dans un parallélipipède circonscrit à une sphère, chacune des arêtes est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.

CONCOURS DE 1862

Classe de troisième (sciences).

— Soient AB une droite fixe, et O un point fixe en dehors de cette droite. Par O, on mène une sécante quelconque OM, et sur cette sécante on élève au point O la perpendiculaire ON. On prend sur OM un point P tel que $OM \cdot OP = n^2$, et sur ON un point Q tel que $OQ \cdot ON = n^2$. Démontrer que la droite PQ passe par un point fixe lorsque OM, et par suite ON, se déplacent.

Classe de seconde (sciences).

— Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces ASB, ASC, BSC, prises comme bases, trois prismes triangulaires, de hauteur arbitraire, dont les bases supérieures se rencontrent en un point O, et sur la quatrième face ABC, on construit un nouveau prisme triangulaire dont les arêtes latérales sont égales et parallèles à la droite qui joint le sommet S au point O. On demande de démontrer que le quatrième prisme sera équivalent à la somme des trois premiers.

Classe de rhétorique (sciences).

— Un point matériel M se meut d'un mouvement uniforme sur une circonférence donnée. Un autre point matériel M' se meut sur un diamètre de cette circonférence de manière à coïncider toujours avec la projection de M. On demande d'étudier : 1° les variations de la force qui sollicite M' pendant son oscillation ; 2° la loi du mouvement.

— Un point matériel P, sans vitesse initiale, est sollicité par deux forces attractives dirigées vers deux centres fixes A et A'. Ces forces attractives varient proportionnellement aux distances MA, MA' du point mobile aux centres ; de plus, elles prennent des valeurs g et g' quand les distances MA, MA' sont égales à l'unité ; on demande la trajection du mobile et la loi du mouvement.

— Résoudre un triangle rectiligne connaissant l'angle C et les sommes $a + c$, $b + c$ formées en ajoutant successivement le côté c opposé à l'angle C à chacun des deux autres. — On discutera le problème. — Les formules doivent être calculables par logarithmes.

— On suppose que la Terre et Vénus se meuvent circulairement dans le même plan, celui de l'écliptique, et que leurs moyens mouvements en un jour solaire moyen sont respectivement 3548",193 et 5767",668. Le temps est évalué en jours moyens et compté à partir d'une conjonction inférieure de Vénus. On demande : 1° de calculer l'élongation de Vénus et sa longitude géocentrique à une époque quelconque; 2° de déterminer l'époque à laquelle l'élongation aura une valeur donnée ; 3° de calculer le maximum de l'élongation.

Classe de logique (lettres).

— La hauteur d'un cône est $1^m,50$. Quel doit être le rayon de sa base pour que son volume soit équivalent à celui d'une sphère de $1^m,40$ de diamètre.

Classe de logique (sciences).

— Étant données les quatre hauteurs d'un tétraèdre et les distances d'un point à trois des faces, déterminer la distance de ce point à la quatrième face.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE RENNES

Session d'avril 1878.

— Dans un solide formé de deux cônes égaux, appliqués l'un contre l'autre par leurs bases, on propose d'inscrire le cylindre dont la surface totale soit maxima.

— Résoudre l'équation

$$\operatorname{tg}(x+a) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - \frac{1}{3}}.$$

— Étant donnés deux points A et B, et un parallèle XY à la ligne qui les joint, trouver sur cette ligne un point M pour lequel le rapport des distances MA et MB aux deux points fixes, soit minimum.

Session de juillet 1878.

— Déterminer p et p' de manière que la fraction

$$\frac{x^2 + px - 3}{x^2 + p'x + 5}$$

devienne maximum ou minimum pour les valeurs $x = 2$ et $x = 3$.

— La déclinaison du soleil étant supposée égale à d, calculer la durée du jour en un lieu dont la latitude est l.

— Si α, β, γ sont trois nombres distincts satisfaisant aux relations

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0,$$
$$\beta^3 + p\beta + q = 0,$$
$$\gamma^3 + p\gamma + q = 0,$$

prouver que l'on doit avoir

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

— Parmi tous les troncs de cône droits à bases circulaires, de même hauteur et de même volume, quel est celui auquel on peut circonscrire la sphère minima?

— Trouver la relation qui doit exister entre les trois longueurs des côtés

d'un trapèze isoscèle pour que le quadrilatère qui a pour sommets les milieux des quatre côtés soit un carré.

— Etablir la formule au moyen de laquelle on peut trouver tg a en fonction de tg $3a$. Déterminer tg a dans les trois cas suivants :

$$\text{tg } 3a = 0; \text{ tg } 3a = \infty; \text{ tg } 3a = -1.$$

— Trouver les conditions pour que les deux équations

$$a \sin x + b \cos x = c,$$
$$a' \text{ tg } x + b' \text{ cotg } x = c',$$

soient vérifiées par une même valeur de l'arc x.

— Trouver les relations qui lient les racines de l'équation

$$x^2 - 2x\sqrt{p^2 - 2q} + p^2 - 2q = 0 \qquad (1)$$

à celle de

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (2)$$

Supposons qu'on construise un rectangle ayant pour côtés les deux racines de l'équation (2). Indiquer les lignes qui représentent les racines de l'équation (1).

— En faisant tourner un triangle rectangle autour de ses trois côtés, les volumes qu'on obtient sont entre eux comme les nombres 20, 15 et 12. — Trouver la forme du triangle.

— Entre tous les trapèzes qui ont deux sommets en A et B, leurs bases perpendiculaires à une droite donnée XY et le point de concours C des diagonales sur cette droite, quels sont ceux qui ont la plus grande ou la plus petite surface? Données AB $= a$, Aa $= h$, Bb $= k$.

Session de novembre 1878.

— On donne une circonférence de rayon R, et un de ses diamètres AB. A quelle distance du centre faut-il mener la perpendiculaire PM à ce diamètre pour que la corde AM soit égale à la tangente MC, terminée au diamètre prolongé?

— Résoudre les équations

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{c}; \quad \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a-y} = \frac{2}{a-b}.$$

— Dans le triangle ABC, on donne l'angle A, la médiane AD et la surface, calculer les côtés AB et AC. Discussion. Construction géométrique.

— Calculer les angles d'un triangle, sachant que les hauteurs sont entre elles comme les nombres 2, 3, 4.

— Quelle valeur faut-il donner à q dans l'équation $x^2 - 2x + q = 0$ pour que l'une des racines soit égale au carré de l'autre.

— En supposant la terre sphérique, expliquer comment varie la vitesse absolue de rotation d'un point de sa surface, à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur. Dire, par exemple, quelle est la vitesse d'un point de l'équateur et celle d'un point à la latitude de 45° (La circonférence de la terre est connue, par définition).

— Maximum et minimum de la fraction

$$\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 5x - 2}.$$

Années précédentes.

— Trouver sur la droite AB, de longueur donnée a, deux points C et D tels que leur distance CD soit moyenne proportionnelle entre AC et DB, et tels en outre 1° que cette distance soit donnée; 2° qu'elle soit un minimum.

— Une ligne pesante AB de longueur a est formée de deux parties homogènes AC et CB de densité d et d'. Quelle doit être la longueur AC pour que cette ligne se trouve en équilibre sur un couteau D placé à une distance AD $= b$ du point A. — Discussion.

— Calculer à un centimètre cube près le volume régulier inscrit dans une sphère de 2^m, 75 de rayon.

ACADÉMIE DE BESANÇON

Session d'avril 1878.

— Trouver les côtés d'un trapèze isoscèle connaissant la hauteur, le périmètre et la surface.

Session de juillet 1878.

— Résoudre un triangle connaissant la somme de deux côtés, leur produit et leur surface. Application :

$$S = 18935{,}07;$$
$$ab = 271744;$$
$$a + b = 1045,\ 7.$$

— Indiquer d'une façon générale quelle est la nature des questions de maximum ou de minimum qui peuvent être résolues au moyen de l'équation du second degré.

— Par le point A extérieur à une circonférence de rayon R, on mène la tangente AC, et le diamètre AMON qui rencontre la circonférence en M et N. Du point C, on mène le rayon CO et la perpendiculaire CD au diamètre MN. On fait tourner la figure autour du diamètre. Déterminer OA de telle façon que l'on ait

$$\text{Vol. OCA} = \text{vol. DCN} - \text{vol. DCM}.$$

— Construire et calculer l'angle de deux plans, l'un perpendiculaire au plan horizontal, l'autre perpendiculaire au plan vertical.

— Étant données deux circonférences concentriques de rayon a, b et un point A extérieur tel que OA $= d$, mener par ce point une sécante ABC, telle que la portion BC comprise entre les deux circonférences soit égale à c. On calculera les angles COB et CAO.

Application : $a = 12{,}7$; $b = 19{,}3$; $c = 10{,}5$; $d = 52{,}4$.

— Trouver les côtés d'un triangle rectangle connaissant la bissectrice de l'angle droit et la hauteur.

— Inscrire dans un cercle un triangle isoscèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur.

CONCOURS ACADÉMIQUE DE PARIS 1878

Solution par M. GÉLINET, du Lycée d'Orléans (*copie couronnée*).

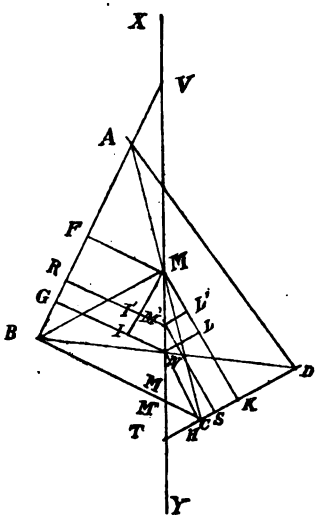
Dans un quadrilatère convexe ABCD *on trace la droite qui joint les milieux des diagonales, on prend un point* M *quelconque sur cette droite dans l'intérieur du quadrilatère, et on joint ce point aux quatre sommmets* A, B, C *et* D.

1° Démontrer que la somme des deux triangles MAB, MCD *qui ont pour sommet commun le point* M *et pour bases deux côtés opposés* AB, CD *du quadrilatère est équivalente à la moitié du quadrilatère.*

2° Comment faudrait-il modifier l'énoncé du théorème, si le point M *était extérieur au quadrilatère tout en restant sur la ligne qui joint les milieux des diagonales?*

3° Faire voir que les points de cette ligne sont les seuls qui jouissent des propriétés précédentes.

4° Déduire de ces théorèmes que dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle le centre du cercle et les milieux des diagonales sont trois points en ligne droite.



I° Supposons le point M milieu de l'une des diagonales; la médiane BM divise le triangle ABC en deux triangles équivalents, donc

$$MAB = MBC;$$

de même

$$MCD = MAD;$$

d'où

$$MAB + MCD = MBC + MAD.$$

Soit M' un point situé sur la droite xy qui joint les milieux des diagonales. Abaissons des points M, M', N des perpendiculaires aux côtés AB, CD. Soient MI et NL perpendiculaires

à NG et à MK; ces droites rencontrent les perpendiculaires M'R et MK en I' et L' et la similitude des triangles des quadrilatères MI'M'L' et MINL donne :

$$\frac{M'I'}{ML'} \text{ ou } \frac{M'R - MF}{MK - M'S} = \frac{NI}{ML}. \qquad (1)$$

Mais de l'identité

$$AB \,.\, MF + CD \,.\, MK = AB \,.\, NG + CD \,.\, NH$$

on tire $\quad AB\,(NG - MF) = CD\,(MK - NH);$

d'où $$\frac{CD}{AB} = \frac{NG - MF}{MK - NH} \text{ ou } \frac{NI}{ML}. \qquad (2)$$

En comparant les égalités (1) et (2) on a :

$$\frac{M'R - MF}{MK - M'S} = \frac{CD}{AB}.$$

Conséquemment

$$AB \,.\, M'R + CD \,.\, M'S = AB \,.\, MF + OD.\, MK$$
$$= \frac{S.ABCD}{2} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

II° Soit M' un point extérieur au quadrilatère et situé entre les points d'intersection V, T, de xy avec AB et CD. Les distances de ce point aux côtés AB, CD et AD sont de même sens que celles du point M aux mêmes côtés, et sa distance au côté BC est de sens contraire à celle du point M à ce même côté. En convenant de regarder comme positives les perpendiculaires menées dans le même sens et comme négatives les perpendiculaires menées dans des sens contraires, on voit que la première partie de l'énoncé est vraie pour tout point extérieur au quadrilatère, considéré comme sommet des triangles dont les bases seraient AB et CD et pris sur la portion de ligne VT. Au contraire, c'est la différence des triangles qui est constante quand ces triangles ont pour bases AD et BC. Cette dernière proposition est vraie pour tout point de xy pris au delà des points V et T, considéré comme sommet de triangles dont les bases seraient deux côtés opposés quelconques.

En particulier, si l'on joint un point quelconque pris à l'intérieur d'un parallélogramme aux quatre sommets, la somme de deux triangles qui ont pour bases deux côtés

opposés est équivalente à la moitié du parallélogramme; si le point est extérieur, c'est la différence qui est constante.

III° Tout point M pris en dehors de la ligne xy ne jouit pas des propriétés énoncées. En effet, si de ce point on abaisse des perpendiculaires aux côtés AB et CD en limitant ces perpendiculaires à leurs points d'intersection avec les droites MI et ML, le quadrilatère ainsi formé n'est pas semblable au quadrilatère MINL. Il ne peut donc pas se décomposer en triangles semblables à ceux du premier et par suite une proportion analogue à la proportion (1) ne peut être établie.

IV° Dans tout quadrilatère ABCD circonscrit à un cercle la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres. En joignant les sommets au centre du cercle on forme quatre triangles dont le rayon R du cercle est la hauteur commune. L'égalité

$$(AB + CD)\frac{R}{2} = (AC + AD)\frac{R}{2}$$

prouve d'après ce qui précède que le centre du cercle est situé sur la droite qui joint les milieux des diagonales.

QUESTIONS PROPOSÉES

141. — Étant donné un triangle ABC inscrit dans un cercle, par les points B et C on fait passer un cercle qui coupe AC en E et AB en D; puis par les points D, A, E, on mène un cercle qui coupe en F le cercle circonscrit au triangle ABC. Démontrer la relation

$$\frac{FE + FB}{FC + FD} = \frac{AB}{AC}.$$

142. — Par le sommet d'un triangle équilatéral on mène une ligne PQ terminée à deux droites perpendiculaires à la base et passant par ses extrémités. Sur PQ comme côtés on décrit deux triangles équilatéraux. Démontrer que les

sommets libres se meuvent sur la base et sur une droite fixe parallèle à la base.

143. — Par un point fixe, on mène une droite coupant deux parallèles données en P et A. Par les points P et Q on mène des droites respectivement parallèles à des droites données et se coupant en R. Prouver que le lieu de R est une ligne droite.

144. — Si l'on divise la base BC d'un triangle en trois parties égales aux points Q et R, démontrer les égalités suivantes :

$$\sin BAR \,.\, \sin CAQ = 4 \sin BAQ \,.\, \sin CAR.$$

$$(\cot g\, BAQ + \cot g\, QAR)(\cot g\, CAR + \cot g\, RAQ) = 4 \operatorname{coséc}^2 QAR.$$

145. — On donne un point sur chacun des côtés d'un angle. Construire deux circonférences égales tangentes entre elles et touchant chacune un des côtés de l'angle au point donné.

Avis. — Il reste à résoudre les questions 135, 136, 137, 138 et 140, énoncées dans la seconde année. — Toutes les autres questions sont publiées, ou bien la rédaction en a des solutions qui paraîtront prochainement.

A ce sujet, nous rappelons à nos lecteurs que les solutions doivent être séparées pour chaque question, avec une figure à part si c'est nécessaire, et que, de plus, il est indispensable de mettre sur chaque question, très-lisiblement, le nom de l'auteur de la solution, ainsi que le nom de l'établissement auquel il appartient. Sans ces précautions, il nous serait impossible de classer les solutions, et aussi de répondre, si c'est utile, à l'auteur de l'envoi.

Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 22226-8.

NOTE SUR LA PARABOLE

Par **Maurice d'Ocagne.**

I. — Nous allons étendre à la parabole les propriétés énoncées pour l'ellipse dans la question n° 106,* et dans une note publiée par nous dans ce journal.**

Si l'on considère une ellipse et l'un de ses cercles directeurs et que l'on fasse tendre le foyer, centre de ce cercle directeur, vers l'infini, l'autre foyer et le sommet voisin restant fixes, la limite de l'ellipse est une parabole dont le foyer est celui des foyers de l'ellipse qui reste fixe; la limite du cercle directeur est une droite perpendiculaire au grand axe et qui est la directrice de la parabole, limite de l'ellipse.

Nous pourrons donc, en envisageant la parabole de cette manière, appliquer à cette courbe la propriété démontrée pour l'ellipse dans la question n° 106 et nous énoncerons le théorème suivant :

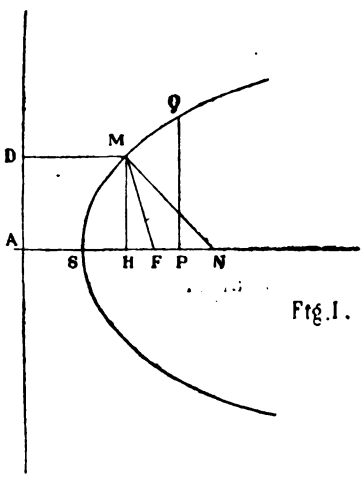


Fig. I.

Théorème. — *Si à partir du sommet d'une parabole on porte sur l'axe et dans la direction du foyer une longueur égale au rayon vecteur d'un point de cette courbe et que l'on élève l'ordonnée du point ainsi déterminé sur l'axe, cette ordonnée est égale à la normale du point de la parabole considérée, limitée à l'axe.*

Il est intéressant de donner une démonstration directe de ce théorème.

Considérons un point M d'une parabole et la normale

* T. II, p. 254.
** T. II, p. 363.

MN en ce point (*fig.* I). Portons sur l'axe la longueur SP égale à MF et menons l'ordonnée PQ. Je dis que PQ = MN.

En effet, du point M abaissons l'ordonnée MH et la perpendiculaire MD à la directrice.

Représentant par p le paramètre, nous avons

$$\overline{PQ}^2 = 2p\ SP$$

Mais $SP = MF = MD = AH = \frac{p}{2} + SH.$

Donc $$\overline{PQ}^2 = 2p\left(\frac{p}{2} + SH\right) \qquad (1)$$

D'autre part $\overline{MN}^2 = \overline{NH}^2 + \overline{MH}^2$

Or la sous-normale étant constante et égale au paramètre, on a $\overline{NH}^2 = p^2.$

De plus $\overline{MH}^2 = 2p\ .\ SH,$

Par suite $\overline{MN}^2 = p^2 + 2p\ SH$

ou $$\overline{MN}^2 = 2p\left(\frac{p}{2} + SH\right). \qquad (2)$$

Comparant (1) et (2) on voit que

$$PQ = MN \qquad \text{c. q. f. d.}$$

II. — Ce théorème fournit une manière de mener la tangente à la parabole en un point pris sur cette courbe : après avoir fait la construction indiquée dans l'énoncé, ce qui donne la longueur de la normale, du point M comme centre avec cette longueur pour rayon on décrit un arc de cercle qui coupe l'axe en un point N ; on tire MN et on élève en M une perpendiculaire à cette droite ; on a ainsi la tangente cherchée.

III. — Appliquons maintenant à la parabole, considérée comme limite d'une ellipse, la construction de la tangente, que nous avons indiquée pour cette dernière courbe, dans une note citée plus haut.

Nous allons d'abord appliquer strictement la règle, quitte ensuite à la simplifier; nous arriverons du reste, en opérant ainsi, à une propriété connue de la parabole.

Soit à mener la tangente en un point M d'une parabole

considérée comme une ellipse dont un des foyers est à l'infini (*fig.* II); d'après notre règle, nous abaissons l'ordonnée MH de M; par le centre de l'ellipse nous menons une droite quelconque; comme, dans ce cas, le centre est à l'infini, cela revient à mener à l'axe une parallèle quelconque XY; il faut porter sur cette ligne à partir du centre une longueur égale au demi grand axe, c'est-à-dire du centre de l'ellipse avec un rayon égal au demi grand axe décrire un arc de cercle et prendre son intersection avec XY; mais le centre étant à l'infini, cet arc de cercle se réduit à la perpendiculaire SP menée en S à l'axe; il faut maintenant joindre HP, mener par S une parallèle SN à cette droite et rabattre sur l'axe la distance de N au centre de la courbe; par les mêmes considérations que précédemment on voit que ce rabattement s'effectue en abaissant du point N la perpendiculaire NT sur l'axe; on n'a plus alors qu'à joindre MT.

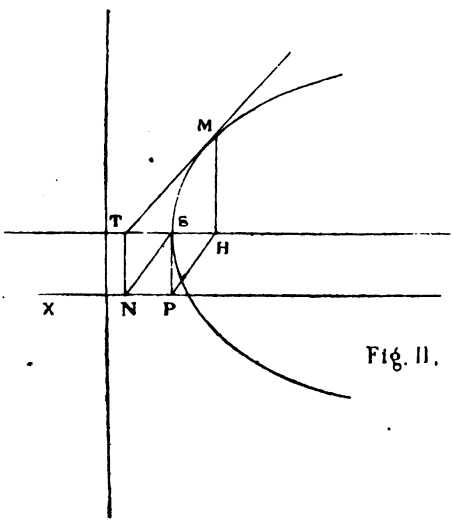


Fig. II.

Mais les triangles rectangles HSP et STN sont égaux, car HP = SN et PS = NT comme parallèles comprises entre parallèles. Par suite, HS = ST et on est ainsi amené à ce théorème connu :

Dans la parabole, la sous-tangente est divisée en deux parties égales par le sommet de la courbe.

Dès lors, la construction de la tangente devient très-simple : on abaisse l'ordonnée MH du point M; on porte sur l'axe, à partir du sommet et en dehors de la courbe, une longueur ST = SH, et on joint MT.

IV. — Nous allons alors, en nous basant sur cette construction de la tangente, traiter pour la parabole la question analogue à celle que nous avons résolue pour l'ellipse dans une note précédente :

Étant donnés l'axe, le sommet et un point d'une parabole, construire cette courbe (fig. III).

Je mène la tangente MT au point M par la méthode indiquée plus haut. J'élève en M la perpendiculaire MN à cette droite; j'ai ainsi la normale en M. MN est bissectrice de l'angle que font le rayon vecteur de M et la parallèle menée par ce point à l'axe, c'est-à-dire la ligne qui joint M au foyer placé à l'infini. Je trace donc cette droite ME; si je mène alors MF de telle façon que NMF = NME, je détermine sur l'axe le point F, foyer de la parabole. Pour avoir la directrice je prends SA = SF et j'élève au point A la perpendiculaire à l'axe.

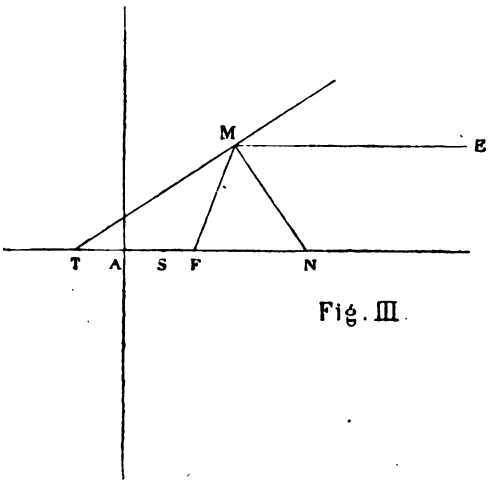


Fig. III

Il est alors facile de construire la courbe.

NOTE DE TRIGONOMÉTRIE

Par **A. Morel.**

Dans les applications réelles de la trigonométrie, les données ne sont évaluées qu'avec une certaine approximation. Il en résulte pour les lignes trigonométriques des angles, puis pour les éléments inconnus, des erreurs qu'il

est intéressant de calculer. C'est ce que nous allons faire dans cette note, que nous diviserons en deux parties : variation des lignes trigonométriques et variation des éléments inconnus du triangle.

1. *Trouver l'accroissement du sinus ou du cosinus d'un angle correspondant à un accroissement déterminé de cet angle.*

Soit un angle x que nous augmenterons d'une certaine quantité que nous désignerons par δx; appelons $\delta \sin x$ et $\delta \cos x$ les accroissements correspondants du sinus et du cosinus; on aura d'après ces définitions

$$\delta \sin x = \sin (x + \delta x) - \sin x,$$
$$\delta \cos x = \cos (x + \delta x) - \cos x;$$

par des formules connues, on trouve

$$\delta \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{1}{2} \delta x\right) \sin \frac{1}{2} \delta x; \qquad (1)$$

$$\delta \cos x = - 2 \sin \left(x + \frac{1}{2} \delta x\right) \sin \frac{1}{2} \delta x. \qquad (2)$$

On considère ici la différence comme un accroissement, et par suite on lui donne le signe algébrique positif; mais elle peut être par elle-même négative. Par exemple, $\delta \sin x$ est positif si x est inférieur à 90°, et négatif quand x est compris entre 90° et 270°.

2. *Trouver l'accroissement de la tangente et de la cotangente.*

En employant les mêmes notations que précédemment, on a $\delta \operatorname{tang} x = \operatorname{tang} (x + \delta x) - \operatorname{tg} x,$

$$\delta \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} (x + \delta x) - \operatorname{cotg} x,$$

et, d'après des formules que l'on donne dans tous les cours,

$$\delta \operatorname{tang} x = \frac{\sin \delta x}{\cos x \cos (x + \delta x)}, \qquad (3)$$

$$\delta \operatorname{cotg} x = \frac{- \sin \delta x}{\sin x \sin (x + \delta x)}. \qquad (4)$$

3. *Trouver l'accroissement de la sécante et de la cosécante.*

On a $\delta \operatorname{séc} x = \operatorname{séc} (x + \delta x) - \operatorname{séc} x,$

$$\delta \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} (x + \delta x) - \operatorname{cosec} x.$$

Et d'après les valeurs de ces lignes en fonction du sinus et du cosinus,

$$\delta \text{ séc } x = \frac{2 \sin (x + \frac{1}{2} \delta x) \sin \frac{1}{2} \delta x}{\cos (x + \delta x) \cos x}; \quad (5)$$

$$\delta \text{ coséc } x = \frac{-2 \cos (x + \frac{1}{2} \delta x) \sin \frac{1}{2} \delta x}{\sin (x + \delta x) \sin x.}. \quad (6)$$

4. *Trouver l'accroissement des carrés des fonctions trigonométriques correspondant à un accroissement donné de l'angle.*

On trouverait immédiatement par un procédé identique au précédent

$$\delta \sin^2 x = -\delta \cos^2 x = \sin (2x + \delta x) \sin \delta x, \quad (7)$$

$$\delta \text{ tang}^2 x = \frac{\sin (2x + \delta x) \sin \delta x}{\cos^2 (x + \delta x) \cos^2 x}, \quad (8)$$

$$\delta \text{ cotg}^2 x = \frac{-\sin (2x + \delta x) \sin \delta x}{\sin^2 (x + \delta x) \sin^2 x}. \quad (9)$$

Comme on a

$$\text{séc}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x, \quad \text{coséc}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x,$$

on en déduit

$$\delta \text{ séc}^2 x = \delta \text{ tg}^2 x; \quad \delta \text{ coséc}^2 x = \delta \text{ cotg}^2 x.$$

Si, dans un triangle, on suppose que l'un des éléments nécessaires pour déterminer le triangle est affecté d'une certaine erreur, les quantités inconnues sont affectées aussi d'une erreur; nous allons nous proposer le problème général suivant :

Trouver l'erreur que l'on commet sur les éléments inconnus d'un triangle, lorsque l'un des éléments donnés est affecté d'une erreur déterminée, les deux autres éléments donnés étant exacts.

Nous étudierons successivement les trois cas élémentaires en laissant de côté le cas douteux, qui ne sert pas dans la pratique. Il va sans dire que si deux éléments donnés étaient inexacts, on commencerait par déterminer l'inexactitude résultant de l'erreur de l'un d'eux, puis on partirait de ce premier calcul pour déterminer l'erreur provenant du second élément.

1er CAS. *On donne deux angles et le côté adjacent.*

Nous laisserons immédiatement de côté le cas où l'on commet une erreur seulement sur le côté donné, car on sait que dans ce cas on aurait

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\delta b}{b} = \frac{\delta c}{c}.$$

Nous supposerons donc que l'on commet une certaine erreur sur l'un des angles ; soient A et c les deux constantes, B l'angle sur lequel on commet une erreur δB. Le triangle réel a pour éléments A, B, C, a, b, c; le second a pour éléments A, c, B + δB, C + δC, $a + \delta a$, $b + \delta b$.

Comme on sait que la somme des angles reste constante, il en résulte d'abord $\delta B + \delta C = 0$; (10)

on a aussi

$a = c \sin A \operatorname{coséc} C$; $a + \delta a = c \sin A \operatorname{coséc} (C + \delta c)$.

Donc on a, en vertu de l'équation (6)

$$\frac{\delta a}{2} = -\frac{c \sin A}{\sin C} \frac{\cos\left(C + \frac{1}{2}\delta C\right) \sin \frac{1}{2}\delta C}{\sin (C + \delta C)}. \quad (11)$$

Donc l'erreur commise est donnée par la relation

$$\frac{\frac{1}{2}\delta a}{\sin \frac{1}{2}\delta B} = a \frac{\cos\left(C + \frac{1}{2}\delta C\right)}{\sin (C + \delta C)}. \quad (12)$$

On voit qu'elle est de même signe que δB.

On a aussi, de l'égalité

$$c \sin B = b \sin C,$$

que l'on peut écrire

$$c \sin (A + C) = b \sin C,$$

la relation $\operatorname{tg} C = \dfrac{c \sin A}{b - c \cos A}$;

d'où $b - c \cos A = c \sin A \operatorname{cotg} C$,

puis $b + \delta b - c \cos A = c \sin A \operatorname{cotg} (c + \delta c)$.

D'où l'on tire, d'après la formule (4)

$$\delta b = -\frac{c \sin A}{\sin C} \cdot \frac{\sin \delta C}{\sin (C + \delta C)}; \quad (13)$$

donc

$$\frac{\delta b}{\sin \delta B} = \frac{a}{\sin (C + \delta C)}. \quad (14)$$

Application numérique.

Soit un triangle dans lequel on a
$C = 234^m,61$; $A = 57^\circ 28'$; $B = 46^\circ 51'$, et supposons que l'on ait commis sur l'angle B une erreur en moins de 10 minutes.

Calculons d'abord en supposant les données exactes.

Nous avons $C = 75^\circ 41'$.

Puis les formules $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
nous donnent, pour les éléments du triangle,

$$b = 176^m,65,$$
$$a = 204^m,13.$$

Maintenant nous avons, puisque δB (la quantité que nous devons ajouter) est égal à $+ 10$ minutes,

$$C + \frac{1}{2}\delta C = 75^\circ 36',$$
$$C + \delta C = 75^\circ 31';$$

car $\delta C = - 10'$.

La formule (12) nous donne

$$\frac{1}{2}\delta a = 0^m,076,$$
$$\delta a = 0^m,153.$$

La formule (14) nous donne

$$\delta b = 0^m,628.$$

Donc, en nous tenant au centimètre, nous aurons, pour les valeurs des côtés inconnus,

$$b = 176^m,81; \qquad a = 204^m,76.$$

2e CAS. *On donne deux côtés et l'angle compris.*

Supposons d'abord que l'erreur est commise sur l'un des côtés; nous aurons comme données exactes c et A; nous supposerons commise une erreur δb sur b.

Nous aurons alors toujours

$$C + B = 180^\circ - A.$$

Puis, on a les relations

$$\frac{c - b}{c + b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C - B)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2} A};$$

$$\frac{c - b - \delta b}{c + b + \delta b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C - B + 2\delta C)}{\operatorname{cotg} \frac{1}{2} A}.$$

On déterminera donc, en comparant ces deux formules, la valeur de δC, et par suite on pourra continuer le calcul comme précédemment, puisque nous aurons toujours la relation $\delta B + \delta C = 0$,
et que nous serons ramenés au cas précédent. Nous déterminerons donc a au moyen de la formule (12).

Application numérique.

Supposons $c = 340^m,16$; $A = 68^\circ\ 17$; $b = 531^m,18$ avec une erreur par défaut de $0^m,05$.

Un premier calcul nous donne

$$B = 73^\circ\ 46',4,$$
$$C = 37^\circ\ 56',6,$$
$$a = 513^m,94.$$

Il faudra, pour obtenir la valeur exacte, augmenter b de 0^m05; nous obtiendrons alors pour l'accroissement de l'angle B $\delta B = 0'2$.

On voit qu'il n'en résulte pas pour la valeur de a une différence de un centimètre.

En second lieu supposons que b et c soient constants, et que A subisse un accroissement δA. Alors, on a les formules

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$
$$(a + \delta a)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos (A + \delta A),$$

d'où l'on tire par soustraction, en vertu de l'équation (2),

$$\left(\frac{1}{2}\delta a\right)^2 + \frac{1}{2} a\delta a = bc \sin\left(A + \frac{1}{2}\delta A\right) \sin \frac{1}{2}\delta A \quad (15).$$

Cette relation nous donne deux valeurs pour $\frac{1}{2}\delta a$; l'une d'elles est positive, c'est la seule que nous prendrons; nous calculerons ainsi la valeur de $a + \delta a$; ensuite nous déterminerons la variation de l'un des angles, de l'angle C par exemple, par la formule

$$\frac{a + \delta a}{\sin (A + \delta A)} = \frac{c}{\sin (C + \delta C)}, \quad (16)$$

dans laquelle tout est connu, excepté δC.

Application numérique.

Soient :

$$c = 340^m,16;\ b = 531^m,18;\ A = 58°17',$$

cette dernière ayant une erreur de 12′ par défaut.

Nous trouvons d'abord

$$B = 73°\ 46',4,$$
$$C = 37°\ 56',6,$$
$$a = 513^m,94.$$

Pour faire le calcul, nous déterminerons d'abord le second membre de l'équation (15); puis nous trouvons tout calcul fait $\frac{1}{2}\delta a = 0^m,61,$

d'où $\delta a = 1^m,22.$

Donc on trouvera $a = 515^m,16.$

Enfin, la formule (16) nous donne

$$C + \delta C = 37°\ 54',$$

et par suite $B + \delta B = 73°\ 37'.$

3e CAS. *On donne les trois côtés.*

Il est très-facile de déterminer par logarithmes les variations des tangentes, et par suite les variations des angles, puisque l'on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b\,(p-c)}{p\,(p-a)}},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-a)}{p\,(p-b)}}.$$

On voit qu'il suffira, dans le calcul par logarithmes, de chercher la variation du facteur $(p - a)$, variation qui est égale à $-\delta a$, et on aura les variations des demi-angles. Or, il sera facile de trouver immédiatement, par une simple lecture de la table, dans la partie correspondante à $(p - a)$ la variation logarithmique provenant de la variation $-\delta a$.

EXEMPLE. On donne

$$a = 257^m,35;\quad b = 326^m,40;\quad c = 185^m,30.$$

L'erreur commise sur le terme a est de $0^m,15$ par excès. On trouve pour la valeur donnée

$$A = 51°\ 54',$$
$$B = 93°\ 35',4,$$
$$C = 34°\ 30',8.$$

Puis, pour la vraie valeur

$$A = 51^\circ\ 52',8,$$
$$B = 93^\circ\ 36',4,$$
$$C = 34^\circ\ 31'.$$

Le calcul, dans ce dernier cas, s'effectue avec beaucoup de rapidité.

NOTE SUR LA DIVISIBILITÉ

Par **Maurice d'Ocagne.**

La détermination des caractères de divisibilité des nombres par 2, 3, 5, 9, 11, constitue, dans les cours élémentaires, l'objet de recherches distinctes. Il est même rare qu'on y joigne la divisibilité par 7, qui est un peu plus difficile à établir.

Nous allons exposer la méthode générale que l'on emploie pour trouver les caractères de divisibilité par un nombre quelconque, quelle que soit la base du système de numération employé.

Nous déduirons ensuite de cette règle, comme applications, les divers caractères de divisibilité que l'on détermine, d'ordinaire, directement.

Il est utile d'établir d'abord le théorème suivant :

Théorème. — *Les divisions des nombres* a^0, a^1, a^2, . . . a^n, . . . *par un diviseur quelconque* d *premier avec* a *donnent des restes périodiques.*

d étant premier avec *a*, l'est aussi avec toutes les puissances de ce nombre, donc toutes ces divisions fourniront des restes.

Ces restes étant tous entiers et inférieurs à *d*, on devra, au bout de *d* divisions au plus, retrouver forcément un des restes déjà obtenus.

Je dis maintenant que si a^k et a^l donnant des restes égaux, en supposant $l > k$, a^{l+1} donnera le même reste

que a^{k+1}. En effet, on a

$$a^l = \text{mult. } d + r \qquad a^k = \text{mult. } d + r$$

multipliant les deux membres de chacune de ces égalités par a, il vient

$$a^{l+1} = \text{mult. } d + ra \qquad a^{k+1} = \text{mult. } d + ra$$

a^{l+1} et a^{k+1} donnant tous deux le même reste que ra fournissent bien des restes égaux.

On retrouvera donc à partir de a^l et dans le même ordre les restes obtenus à partir de a^k.

Conséquence. — Considérons alors un nombre quelconque N écrit dans le système de numération dont la base est β.

Si nous représentons par $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ les différents chiffres qui composent le nombre N, nous avons

$$N = \alpha_0\beta^0 + \alpha_1\beta^1 + \ldots \alpha_n\beta^n.$$

Cherchons les restes de la division des différents nombres $\beta^0, \beta^1 \ldots \beta^n$ par p. Nous avons

$$\begin{aligned} \beta^0 &= \text{mult. } p + r_0, \\ \beta^1 &= \text{mult. } p + r_1, \\ &\vdots \\ \beta^n &= \text{mult. } p + r_n. \end{aligned}$$

Par suite,

$$N = \text{mult. } p + \alpha_0 r_0 + \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_n r_n,$$

ce qui montre que le reste de la division de N par p est le même que celui de la division de $\alpha_0 r_0 + \alpha_1 r_1 + \ldots + \alpha_n r_n$ par p.

Donc, pour avoir le reste de la division d'un nombre quelconque par p, on déterminera les restes $r_0, r_1, \ldots$ relatifs au nombre p jusqu'à ce que l'on en trouve un déjà obtenu; à partir de là, d'après le théorème ci-dessus démontré, ils se reproduiront périodiquement; puis, on multipliera les différents chiffres du nombre par les restes correspondants; on fera la somme des produits ainsi obtenus et on divisera cette somme par p; le reste fourni par cette dernière division sera le reste cherché. Par suite pour que le nombre considéré soit divisible par p, il faut et il suffit que ce dernier reste soit nul.

Cette règle est longue à énoncer, mais très-simple à appliquer comme nous allons le voir dans les exemples suivants.

Applications. — *Caractères de divisibilité par* 2, 5, 3, 9, 11, 7 *dans le système décimal.*

Nous chercherons d'abord les restes de la division de 10^0, 10^1, 10^2,.... par ces différents nombres ; résumons les résultats ainsi obtenus en un tableau et remarquons que nous ne calculons les restes que jusqu'à ce que nous en trouvions un déjà obtenu. Pour bien signaler ce point à l'attention du lecteur, nous soulignons d'un trait chacun des restes où la deuxième période commence.

Diviseurs	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1
5	1	0	0	0	0	0	0
7	1	3	2	6	4	5	1
9	1	1	1	1	1	1	1
11	1	10	1	10	1	10	1

Divisibilité par 2 *et* 5. — Il faut à partir de la droite multiplier les chiffres du nombre considéré respectivement par 1, 0, 0,.... En faisant la somme de ces produits on a pour résultat le chiffre des unités du nombre. Il faut donc que ce chiffre soit divisible par 2 ou 5 pour que le nombre soit lui-même divisible par 2 ou 5. D'où les règles connues :

1° *Pour qu'un nombre soit divisible par* 2 *il faut et il suffit que son dernier chiffre à droite soit pair ou* 0.

2° *Pour qu'un nombre soit divisible par* 5 *il faut et il suffit que son dernier chiffre à droite soit* 5 *ou* 0.

Divisibilité par 3 *et* 9. — Dans ces deux cas, r_1, r_1,.... étant tous égaux à 1, *la condition pour que le nombre considéré soit divisible par* 3 *ou* 9 *est que la somme des chiffres de ce nombre soit divisible par* 3 *ou* 9.

Divisibilité par 11. — D'après le tableau ci-dessus formé, on voit que la condition pour qu'un nombre soit divisible par 11 est, en représentant par S_i la somme des chiffres de rang impair et par S_p la somme des chiffres de rang pair :

$$S_i + 10\,S_p = \text{mult. } 11,$$

ou $$S_i + 11\,S_p - S_p = \text{mult. } 11,$$

ou encore $$S_i - S_p = \text{mult. } 11,$$

ce qui est bien l'expression de la règle connue : *l'excès de la somme des chiffres de rang impair sur la somme des chiffres de rang pair doit être divisible par* 11.

Divisibilité par 7. — Si nous appelons encore α_1, α_2, . . . les divers chiffres du nombre considéré, le tableau nous donne pour condition de divisibilité de ce nombre par 7,

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 5\alpha_6 + \alpha_7 + \ldots = \text{mult. } 7$$

ou

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 7\alpha_4 - \alpha_4 + 7\alpha_5 - 3\alpha_5 + 7\alpha_6 - 2\alpha_6 + \alpha_7 + \ldots = \text{mult. } 7$$

ou encore

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 - 3\alpha_5 - 2\alpha_6 + \alpha_7 + \ldots = \text{mult. } 7$$

d'où la règle : *on divise le nombre en tranches de* 3 *chiffres à partir des unités, on multiplie, dans chacune de ces tranches et à partir de la droite, les chiffres respectivement par* 1, 3, 2; *la somme des produits correspondant aux tranches de rang impair diminuée de la somme des produits correspondant aux tranches de rang pair doit alors donner un résultat divisible par* 7.

CONCOURS GÉNÉRAL 1869.

Classe de troisième (sciences).

— On prend un point dans le plan d'un polygone quelconque. On joint ce point aux sommets du polygone, et, de ce point comme centre avec ces droites comme rayons, on trace des arcs de cercle d'un même nombre de degrés et dans le même sens; on joint les extrémités de ces arcs.

Prouver qu'on forme un nouveau polygone égal au premier.

Classe de seconde.

— Les lettres α et β désignant deux nombres donnés positifs ou négatifs, on propose de déterminer a et b de manière que α et β soient la plus grande et la plus petite valeur que prend l'expression

$$\frac{ax^2 + 2x + b}{x^2 + 1}$$

quand on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$. On examinera si le problème est toujours possible.

— Des prismes tronqués équivalents ont une base inférieure commune et les arêtes dirigées suivant les mêmes droites.

Démontrer que les plans des bases supérieures passent tous par un même point.

Classe de rhétorique.

— Un triangle ABC étant inscrit dans un cercle dont le rayon est pris pour unité, on mène par le sommet de chaque angle une perpendiculaire à la droite qui divise cet angle en deux parties égales. On obtient ainsi trois lignes qui déterminent un second triangle A'B'C' dont les côtés B'C', A'C', A'B' passent respectivement par les trois sommets A, B, C du premier triangle. Cela posé, on demande de résoudre le triangle ABC sachant:

1° Que dans le triangle ABC, le rapport du côté AB à la somme des deux autres est égale à un nombre donné λ;

2° Que dans le triangle A'B'C' le rapport du côté A'B' à la somme des deux autres est égal à un nombre donné μ.

On indiquera les conditions auxquelles doivent satisfaire les nombres donnés pour que le problème soit possible. On achèvera ensuite les calculs en supposant $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{2}{3}$.

On donne un corps sphérique A, dans l'intérieur duquel se trouve une cavité sphérique B. La densité de A est 4; son rayon $0^m,50$.

Le rayon de la cavité B est $0^m,15$. La distance de son centre b au centre a de A est $0^m,20$ et la hauteur de b au-dessus de a est $0^m,18$.

On demande la position du centre de gravité du corps A. — On demande en outre quelle serait la position de ce centre de gravité si l'espace B, au lieu d'être vide avait, une densité double de celle de A.

Classe de philosophie.

— *Caractères de divisibilité d'un nombre par 2, 3, 4, 5 et 9.*

— Étant donnés trois cercles qui ont respectivement pour rayons $0^m,315$, $0^m,420$, $0^m,260$, calculer le rayon d'un cercle équivalent à leur somme.

Classe de philosophie (sciences).

— Trois sphères étant données, on peut construire une infinité d'autres sphères qui leur soient tangentes; par le point de contact de chacune de celles-ci avec les trois sphères données, on peut faire passer un plan. Prouver que les plans ainsi construits passent par une même droite.

— Sur l'un des côtés OX d'un angle droit, on porte une longueur arbitraire OM et on prend une longueur ON qui soit à OM dans le rapport d'une ligne donnée n à une autre ligne donnée m; puis on joint les points M et N à un point fixe donné sur l'autre côté OY. On demande de choisir M de façon que l'angle MAN soit maximum.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE CLERMONT.

Juillet 1874.

— Par un point donné mener une droite qui détermine par son intersection avec les côtés d'un angle donné un triangle d'aire minima.

Novembre 1874.

— Surface totale d'un cône circonscrit à la sphère en supposant que le diamètre de base soit égal au côté du cône. — Rapport de cette surface à celle de la sphère.

Novembre 1875.

1. — Dans un triangle dont les côtés sont a, b, c, et les angles A, B, C, démontrer qu'on aura nécessairement les relations

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}.$$

2. — On demande de construire un triangle rectangle tel que le volume engendré par la révolution autour de l'hypoténuse soit égal au 1/8 de la sphère qui aurait cette hypoténuse pour diamètre.

3. — Parmi toutes les cordes de même longueur inscrites dans un demi-cercle, quelle est celle qui en tournant autour du diamètre engendre la plus grande surface? — Quelle est en second lieu la longueur de la corde qui donnerait la plus grande surface possible?

Avril 1876.

— Résoudre l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4.$$

Juillet 1876.

— On fait tourner un trapèze successivement autour de ses deux bases; quel devrait être le rapport de ces bases pour que les volumes obtenus après une révolution complète soient dans un rapport donné, par exemple, comme 3 est à 4.

— Dans un triangle isoscèle ABC fixe et invariable dont la base et la hauteur sont données, on inscrit un deuxième triangle abc variable dont la base est parallèle à celle du premier. On demande:

1° Le maximum de la surface du triangle abc;

2° Le maximum du volume qu'il décrit en tournant autour de sa base abc.

— Partager une demi-circonférence ABCD par un point M de telle sorte que les segments circulaires ABM, MCD et le triangle AMD engendrent en tournant autour du diamètre AB des volumes en progression géométrique.

— Tous les côtés de longueur connue d'un hexagone régulier sont tangents à une sphère. On connaît le rapport m des zones déterminées sur la sphère par le plan de l'hexagone régulier. Quel est le rayon de la sphère?

— Circonscrire à un cercle donné un trapèze isoscèle de surface donnée. Cas du minimum.

— Une droite OA de longueur invariable décrit autour de OM un cône de révolution dont le volume et la surface totale varient avec la distance $AB = x$ du point A à l'axe fixe. On demande : pour quelle valeur de x le volume est maximum; pour quelle valeur de x la surface totale est égale à celle du cercle de rayon a.

Novembre 1876.

1. — On propose de circonscrire à un rectangle donné un triangle isoscèle de surface donnée. Cas du minimum.

2. — Une ville contracte au taux de 5 0/0 un emprunt de 400,000 francs. On calculera la valeur de l'annuité qu'elle devra payer pour être complétement libérée après 20 annuités égales.

— Étudier la variation du signe et de la grandeur de la fraction $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 4}$, lorsqu'on fait varier x par valeurs réelles et d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$.

Avril 1877.

1. — Une fraction dont les termes sont des nombres premiers entre eux est irréductible.

2. — La tangente trigonométrique de la somme de deux arcs est 3; la tangente de leur différence est $\frac{1}{3}$. Quels sont ces deux arcs?

— Démontrer le théorème qui donne le volume décrit par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par un sommet sans traverser la surface de ce triangle.

Le triangle étant isoscèle et l'axe passant par le sommet opposé à la base, quel angle doit faire avec cet axe la hauteur du triangle pour que le volume engendré soit égal à celui que l'on obtiendrait en faisant tourner le triangle autour de la base?

Session d'octobre 1877.

Un hexagone régulier de côté a tourne successivement autour d'un de ses côtés AB, et autour d'un axe xy qui lui est extérieur passant par un sommet C et également incliné sur CB et CD. On demande de calculer pour chacune de ces rotations la surface et le volume décrits respectivement par le périmètre et la surface de l'hexagone.

Juillet 1878.

1re Série. — On donne dans un plan un cercle de centre O et de rayon R et un point A à une distance d de ce point. On demande de mener a

A une sécante telle que la corde interceptée BC soit égale à une longueur donnée $2l$, et de calculer la surface engendrée par la corde BC dans sa révolution autour de OA.

2e *Série.* — Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle compris et calculer sa surface, données : $A = 38°20'$; $b = 7395$ m. ; $c = 4786$ m.

3e *Série.* — Trouver les arêtes x, y, z, d'un parallélipipède rectangle connaissant : 1° la surface totale $2S$ du parallélipipède ; 2° la somme a de ses 3 arêtes ; 3° le rapport m de deux d'entre elles.

4e *Série.* — Volume du segment sphérique. Évaluer le volume du segment détaché dans une sphère d'un rayon égal à 5 mètres par 2 plans parallèles menés d'un même côté du centre à des distances respectivement égales à 1 mètre et à 2 mètres.

5e *Série.* — 1° Inscrire dans une sphère de rayon donné R un cône ABC dont le volume soit dans un rapport donné m avec le volume du segment inférieur BC déterminé par la base du cône.

2° Démontrer que le plus petit multiple commun de deux nombres est égal à leur produit divisé par leur plus grand commun diviseur.

6e *Série.* — Trouver entre quelles limites peut varier la fraction

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'},$$

Application à l'exemple suivant :

$$\frac{3x^2 - 13x + 6}{5x^2 - 17x + 5},$$

7e *Série.* — Résoudre l'équation $\cos x = m \operatorname{tg} x$ ou x est l'inconnue et m une quantité donnée.

Discussion.

Octobre 1878.

Résoudre un triangle connaissant deux côtés a, b et l'angle A opposé à l'un d'eux.

Application $a = 3{,}785$ m. $b = 5{,}092$ m. $A = 35° 40'$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 116.

Solution par M. Reuss, Collége de Belfort.

Étant donné un triangle ABC, *on considère la bissectrice de l'angle* A *et l'on joint un point quelconque* M *de cette bissectrice indéfiniment prolongée aux sommets* B *et* C. *On propose d'étudier la variation du rapport* $\frac{MB}{MC}$.

Soit AM $= x$. Les triangles MBA, MCA donnent

$$MB = \sqrt{x^2 + c^2 - 2cx \cos \frac{A}{2}},$$

$$MC = \sqrt{x^2 + b^2 - 2bx \cos \frac{A}{2}},$$

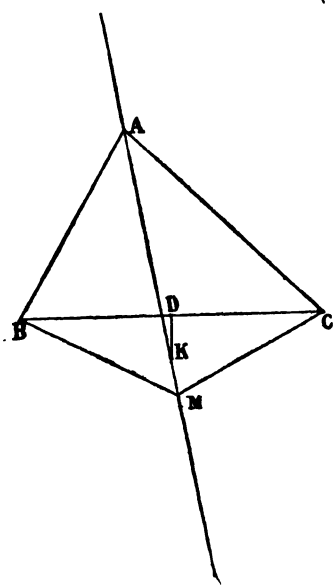
$$\text{d'où } \frac{MB}{MC} = \frac{\sqrt{x^2 + c^2 - 2cx \cos \frac{A}{2}}}{\sqrt{x^2 + b^2 - 2bx \cos \frac{A}{2}}};$$

tel est le rapport dont il faut étudier la variation. Égalant à m et élevant au carré, il vient

$$(m^2 - 1)\, x^2 - 2\,(bm^2 - c)\, x \cos \frac{A}{2} + m^2 b^2 - c^2 = 0,$$

d'où $x =$

$$\frac{(bm^2 - c)\cos\frac{A}{2} - \sqrt{-b^2 m^4 \sin^2\frac{A}{2} + (b^2 + c^2 - 2bc\cos^2\frac{A}{2})m^2 - c^2\sin^2\frac{A}{2}}}{(m^2 - 1)}$$



x devant être réel, la quantité sans le radical doit être positive. C'est un trinôme entier du second degré en m^2 et de la forme

$$-b^2 \sin^2 \frac{A}{2}\,(m^2 - m'^2)\,(m^2 - m''^2).$$

Il sera positif, c'est-à-dire de signe contraire à celui de son premier terme, si on donne à m^2 une valeur quelconque comprise entre les racines. Ainsi la condition de réalité est

$$m'^2 > m^2 > m''^2$$

m'^2 désignant la plus grande racine.

Résolvant l'équation obtenue en égalant à o la quantité sans le radical, on a :

$$m^2 = \frac{(b^2 + c^2 - 2bc\cos^2\frac{A}{2}) - \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc\cos^2\frac{A}{2})^2 - 4b^2c^2\sin^4\frac{A}{2}}}{2b^2\sin\frac{A}{2}}$$

ou en simplifiant le radical

$$m^2 = \frac{(b^2 + c^2 - 2bc\cos^2\frac{A}{2}) + \sqrt{a^2(b-c)^2}}{2b^2\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos^2\frac{A}{2} - a(b-c)}{2b^2\sin^2\frac{A}{2}},$$

Nous supposerons $b > c$, sans quoi nous aurions pu écrire $a(c-b)$ et la plus grande racine au lieu d'être m' aurait été m''. Les conclusions auraient été contraires à celles que nous allons établir.

Si dans les valeurs de m'^2 et de m''^2 nous remplaçons $\cos^2\frac{A}{2}$ et $\sin^2\frac{A}{2}$ par leurs valeurs en fonctions des côtés, on arrive aux expressions plus simples

$$m'^2 = \frac{(a+b-c)\,c}{(a+c-b)\,b}, \quad m''^2 = \frac{(a+c-b)\,c}{(a+b-c)\,b},$$

ou encore

$$m' = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}, \qquad m'' = \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}};$$

à la valeur de $m^2 = m'^2$, c'est-à-dire au maximum du rapport correspond pour x la valeur $\frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$; au minimum correspond pour x la valeur $\frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$.

Cela posé, faisons croître x de $-\infty$ à x. Si à $+\infty = -\infty$,

le dénominateur de $x = 0$, alors $m = 1$. On peut le voir directement en mettant l'expression de m sous la forme

$$\sqrt{\frac{1 + \frac{c^2}{x^2} - 2\frac{c}{x}\cos\frac{A}{2}}{1 + \frac{b^2}{x^2} - 2\frac{b}{x}\cos\frac{A}{2}}},$$

qui pour $x = \pm 8$ donne $m = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$.

Quand x croît de -8 à 0, la fonction part de l'unité pour atteindre la valeur plus petite $\frac{c}{b}$ pour $x = 0$, et le rapport diminue jusqu'à sa valeur minimum $\frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$ pour $x = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$, puis augmente.

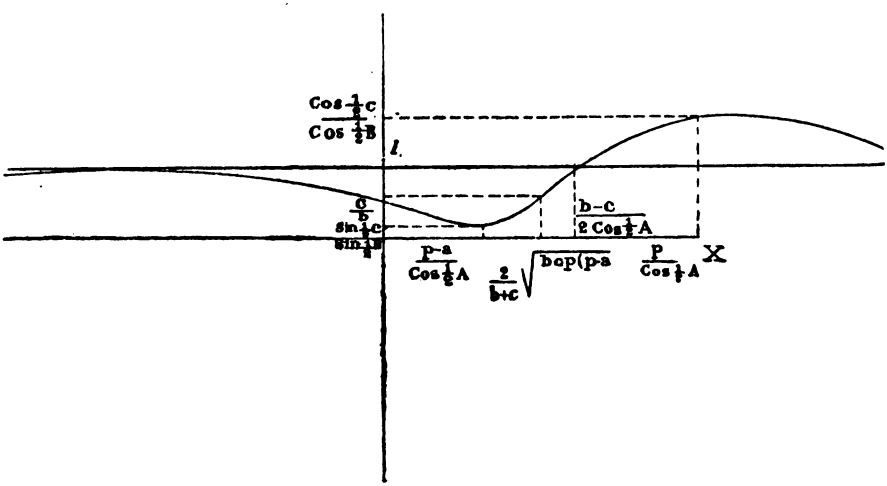
Quand le point M est venu en D, $c \,.\, a \,.\, d$. quand $x = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\,(p-a)}$ m repasse par la valeur $\frac{c}{b}$. Cette considération seule aurait suffi pour montrer *à priori* qu'il existe à l'intérieur du triangle un point M pour lequel le rapport est minimum ou maximum, car m passe deux fois par la même valeur $\frac{c}{b}$ en prenant des valeurs intermédiaires plus petites ou plus grandes. x continuant à croître, m augmente pour atteindre sa valeur maximum $\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$ quand $x = \frac{p}{\cos\frac{A}{2}}$, mais, par hypothèse, $C < B$, donc $\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}} > 1$ et comme m croît d'une manière continue, il

doit y avoir entre le point D et le centre du cercle circonscrit un point pour lequel $m = 1$. Il suffit, pour trouver la valeur de x qui le détermine, de résoudre l'équation

$$x^2 + c^2 - 2cx \cos \frac{A}{2} = x^2 + b^2\ 2bx \cos \frac{A}{2},$$

qui donne $x = \dfrac{b + c}{2 \cos \dfrac{A}{2}}$. M est la perpendiculaire menée au milieu de BC.

Si nous donnons à x des valeurs supérieures à celle qui rend le rapport maximum, m diminue de plus en plus et devient à la limite égal à l'unité quand $x = + \infty$.



Le tableau suivant et la courbe ci-contre permettent de suivre commodément les variations de la fonction.

x	m	x	m
$-\infty$	1	croît	décroît
0	$\dfrac{c}{b}$	croît	décroît
$\dfrac{p-a}{\cos \dfrac{A}{2}}$	$\dfrac{\sin \dfrac{C}{2}}{\sin \dfrac{B}{2}}$		

$\dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$	$\dfrac{c}{b}$	croît	croît
$\dfrac{b+c}{2\cos\dfrac{A}{2}}$	1	croît	croît
$\dfrac{p}{\cos\dfrac{A}{2}}$	$\dfrac{\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}}$	croît	décroît
$+\infty$	1		

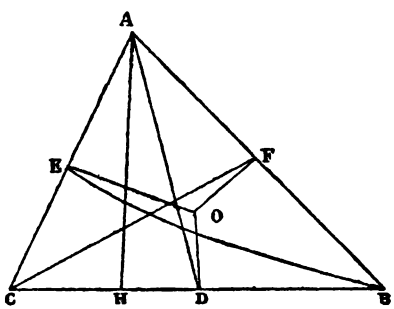
Nota : M. Sou, du collége de Libourne, a résolu la même question.

QUESTION 118.

Solution par M. Sou, élève du collége de Libourne.

Si l'on abaisse d'un point O *les perpendiculaires* OD, OE, OF, *sur les côtés d'un triangle, on a*

$$\text{cotg ADC} + \text{cotg BEA} + \text{cotg CFB} = 0.$$



Menons la hauteur AH. On a

$$\text{cotg ADC} = \frac{DH}{AH} = \frac{DH\,.\,a}{AH\,.\,a} = \frac{DH\,.\,a}{2S} = \frac{DH(BD+DC)}{2S}$$

d'un autre côté

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2DH\,.\,BD$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2DH\,.\,DC$$

d'où $\quad 2(BD + DC)DH = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 - (\overline{BD}^2 - \overline{DC}^2)$

par suite $\quad \text{cotg ADC} = \dfrac{c^2 - b^2 - (\overline{BD}^2 - \overline{DC}^2)}{4S}$

de même $\quad \text{cotg BEA} = \dfrac{a^2 - c^2 - (\overline{CE}^2 - \overline{AE}^2)}{4S}$

$$\text{cotg CFB} = \frac{b^2 - a^2 - (\overline{AF}^2 - \overline{BF}^2)}{4S}$$

donc $\quad \text{cotg ADC} + \text{cotg BEA} + \text{cotg CFB}$

$$= \frac{\overline{BF}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AE}^2 - \overline{AF}^2 - \overline{BD}^2 - \overline{CE}^2}{4S}$$

ajoutant et retranchant au numérateur la quantité

$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2$, on trouve

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - (\overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC})^2 = 0$$

donc $\quad \text{cotg ADC} + \text{cotg BEA} + \text{cotg CFB} = 0.$

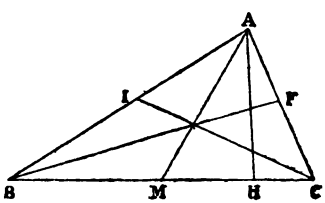
Nota. — M. Reuss, de Belfort, a résolu la même question.

QUESTION 119.

Solution par M. Jimenez, élève du Lycée de Bordeaux.

Les médianes d'un triangle forment avec les côtés qu'elles divisent en deux parties égales des angles comptés dans le même sens de rotation dont la somme des cotangentes est nulle.

Soient ABC un triangle, AM, BF, CI les médianes de ce triangle. Menons la hauteur h. Puisque M est le milieu de BC,



$$MH = \frac{BH - HC}{2}$$

$$h \text{ cotg AMH} = \frac{h \text{ cotg B} - h \text{ cotg C}}{2}$$

ou $\quad \text{cotg AMH} = \dfrac{1}{2}(\text{cotg B} - \text{cotg C})$

de même

$$\text{cotg BIC ou} - \text{cotg AIC} = \frac{1}{2}(\text{cotg A} - \text{cotg B})$$

$$\text{cotg AFB ou} - \text{cogt BFC} = \frac{1}{2}(\text{cotg C} - \text{cotg A});$$

faisons la somme, on a

$$\text{cotg AMH} + \text{cotg BIC} + \text{cotg AFB} = 0.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Reuss, de Belfort; Demortain, de Doullens; Sou, de Libourne.

QUESTION 120.

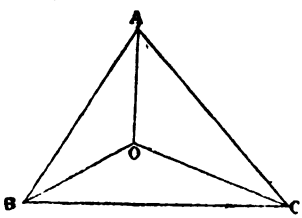
Solution par M. Reuss, de Belfort.

Si l'on prend dans l'intérieur d'un triangle un point O *tel que*

$$\text{CAO} = \text{ABO} = \text{BCO} = \theta$$

on a $\quad \text{cotg}\,\theta = \text{cotg A} + \text{cotg B} + \text{cotg C}.$

Le triangle AOC dans lequel AOC = 180 — (θ + C — θ) ou AOC = 180 — C donne



$$\frac{b}{\sin C} = \frac{OC}{\sin\theta}.$$

De même BOC donne

$$\frac{a}{\sin B} = \frac{OC}{\sin(B-\theta)}.$$

Divisons ces deux égalités membre à membre, il vient

$$\frac{b \sin B}{a \sin C} = \frac{\sin(B-\theta)}{\sin\theta},$$

ou

$$\frac{\sin(B-\theta)}{\sin B \sin\theta} = \frac{b}{a \sin C}.$$

Remplaçons $\frac{b}{a}$ par $\frac{\sin B}{\sin A}$ puis sin B par sin (A + C),

il vient

$$\frac{\sin(B-\theta)}{\sin B \sin\theta} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A \sin C};$$

or le premier membre est égal à cotg θ — cotg B et le second à cotg A + cotg C. On a donc

$$\text{cotg}\,\theta = \text{cotg A} + \text{cotg B} + \text{cotg C}.$$

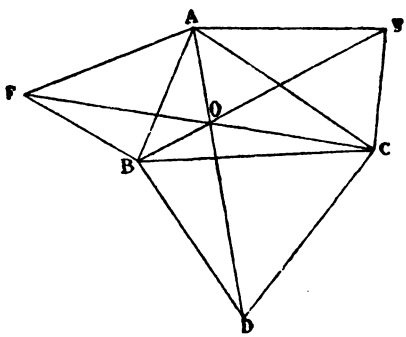
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Demortain, de Doullens; Demari, de Moulins.

QUESTION 121.

Solution par M. Thual, élève du Lycée de Lorient.

Étant donné un triangle ABC, *sur chacun de ses côtés on construit extérieurement au triangle* ABC *des triangles semblables, de telle manière que chacun des angles adjacents à* A *soit égal à* C; *que chacun des angles adjacents à* B *soit égal à* A; *et que chacun des angles adjacents à* C *soit égal à* B. *Démontrer que les trois cercles circonscrits à ces triangles et les droites qui joignent chacun des sommets du triangle* ABC *au sommet opposé se coupent en un même point* O, *tel que les angles* OBC, OBA, OAB *sont égaux entre eux.*

D'après les hypothèses on voit que les angles E, F, D sont respectivement égaux aux angles A, B, C du triangle.



Les circonférences circonscrites aux triangles ABF et BCD se coupent en B et O. Les deux quadrilatères AOF et BOCD étant inscriptibles, on a AOB = A + C et BCO = A + B; donc AOC = $4dr$ — 2A — B — C = $2dr$ — A = B + C.

Le quadrilatère AOCE est alors inscriptible et la circonférence circonscrite au triangle AEC passe le point O.

Je dis maintenant que les droites AD, DE, FC se coupent en O. Nous avons en effet :

AOB = 185° — AFB = A + C, BOD = BCD = B et AOB + BOD = A + B + C = 180°.

Les trois points A, O, D sont en ligne droite. Même démonstration pour les points E, O,B et F, O, C.

Enfin les angles OBC, OCA, OAB sont égaux. En effet,

OBC = 180° — BOC — OCA = 180 — A — B — OCB = C — OCB = OCA. De même OCA = OAB.

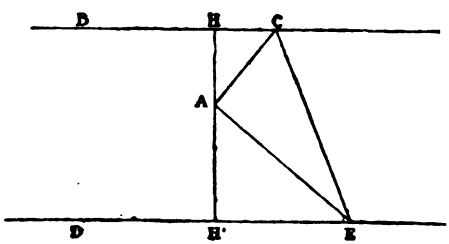
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Sou, de Libourne; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saunier.

QUESTION 122.

Solution par M. DE LA LAURENCIE, élève au Lycée de Nantes.

Étant donné un point A *entre deux parallèles, tracer un triangle rectangle ayant son sommet de l'angle droit en* A *et les deux autres sommets sur les deux parallèles de manière que sa surface soit minima.*

Supposons le problème résolu. Soient BC, DE les deux parallèles; HH′ leur perpendiculaire commune passant par le point A. Soient en outre AH = a, AH′ = b, CA = x, EA = y, HAC = α, H′AE = β.



La surface du triangle CAE est $\frac{xy}{2}$. Or dans le triangle rectangle HAC on a

$$x = \frac{a}{\cos \alpha}$$

de même

$$y = \frac{b}{\cos \beta}$$

La surface a donc pour expression $\frac{ab}{2 \cos \alpha \cos \beta}$.

Pour que cette expression soit minima, il faut que le dénominateur soit maximum. Or $\alpha + \beta = 90^0$ = constante et $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta) + (\cos (\alpha - \beta)}{2}$.

$\cos (\alpha + \beta)$ étant constant, $\cos \alpha \cos \beta$ sera maximum

quand cos $(\alpha - \beta)$ le sera, c'est-à-dire quand cos $(\alpha - \beta) = 1$; d'où $\alpha - \beta = 0$, $\alpha = \beta = 45^0$.

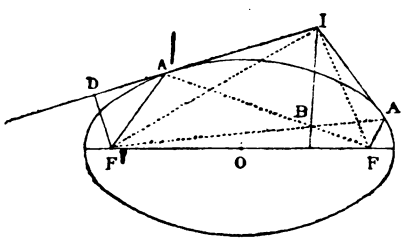
Il faudra donc, pour avoir le triangle de surface minima répondant à la question, faire au point A avec AH et AH' des angles de 45^0.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. d'Ocagne, collége Chaptal; Gélinet, d'Orléans; Bucheron, de Moulins; Hugot, de Lyon; Huet, d'Orléans; Thual, de Lorient; Paulme et Martin, de Passy; Jacquot, de Nancy; Cordeau, école Lavoisier; Objais, de Moulins; Sou, de Libourne.

QUESTIONS PROPOSÉES

146. — On donne un cercle, un diamètre AB et une droite XY perpendiculaire à AB. La polaire d'un point M de XY coupe cette droite en N, et sur MN comme diamètre, on décrit un cercle. Démontrer qne, si l'on fait varier le point M sur XY, tous les cercles tels que MN ont pour axe radical le diamètre AB.

147. — On considère une ellipse. Soit F et F' les foyers de cette ellipse. Par ces points, et dans la même direction, on mène deux rayons vecteurs parallèles rencontrant la courbe, le premier en A, le second en A'. On mène les tangentes en A et A', tangentes qui se rencontrent en I. La figure ainsi tracée jouit des propriétés suivantes.



I. Les triangles F'IA, FIA' sont rectangles au point I.

II. L'angle FIF' est moyen arithmétique entre les angles F'AF, F'A'F.

III. Quand on fait varier la direction des parallèles FA et F'A', le point I décrit le cercle dont le diamètre est le grand axe de l'ellipse.

IV. Les droites FA, F'A' rencontrent l'ellipse sous deux angles tels que la tangente de leur somme, multipliée par la somme de leurs tangentes, est un produit constant, quand on fait varier la direction des parallèles FA, F'A'.

V. On a la relation

$$\frac{IA \times IF}{IA' \times IF'} = \frac{AF}{A'F'}.$$

VI. Si l'on appelle B le point de rencontre des diagonales du trapèze AFA'F', le lieu du point B, quand on fait varier la direction des parallèles AF, A'F', est une ellipse homofocale à la proposée, et normale à la droite BI.

VII. La distance du point B au point I est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point B aux deux foyers F et F'.

VIII. Si du point F on abaisse sur AI la perpendiculaire FD, et du point F' la perpendiculaire F'D', la somme des carrés des inverses de ces perpendiculaires est constante quand on fait varier la direction des parallèles FA, F'A'.

IX. On a $IF \times I'F' = 2a \times IB$.

X. La droite IO est parallèle aux droites FA, F'A', et la somme des inverses des rayons vecteurs FA, F'A' est constante. *(De Longchamps.)*

Avis. — *Bien que, en général, nous ne publiions que des solutions d'élèves, si, dans le courant de l'année, nous n'avons pas reçu de solutions de ce genre, nous publierons volontiers une solution d'une autre personne, pourvu que cette solution soit absolument complète et surtout très-élémentaire.*

148. — Deux cercles se coupent sous un angle de 120°. On mène un cercle tangent à la fois à la tangente commune et aux deux cercles donnés. On a, entre les rayons r et r' des cercles donnés et le rayon x du cercle tangent la relation

$$\frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{3r}} + \frac{1}{\sqrt{3r'}}.$$ *(Perrin.)*

149. — Deux circonférences sont tangentes extérieurement. Sur la ligne des centres comme diamètre, on décrit

une circonférence, et l'on mène la circonférence A tangente aux trois circonférences ainsi obtenues. Si R et r sont les rayons des deux premières, D le diamètre de la circonférence A, on a la relation $\frac{1}{D} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$. Chercher ce qui arrive si les circonférences sont tangentes intérieurement. *(Perrin.)*

150. — Une droite AD rencontre deux circonférences O et O′ de telle sorte que les cordes interceptées AB et CD soient égales entre elles. Trouver : 1° le lieu géométrique du milieu de AD; 2° l'enveloppe de la droite AD. En déduire le problème suivant : mener par un point donné dans le plan de deux circonférences une droite telle que les cordes interceptées soient égales. *(Julliard.)*

151. — Soit ABC un triangle, O un point de son plan. On mène les droites AO, BO, CO, qui coupent les côtés en A′, B′, C′; on coupe le triangle A′B′C′ par une transversale $\alpha\beta\gamma$ (α est le point où cette transversale rencontre B′C′, etc.); les droites Aα, Bβ, Cγ rencontrent les côtés du premier triangle en trois points qui sont en ligne droite.

152. — On a une circonférence fixe O, et un point fixe A; par le point A, on fait passer une circonférence variable, qui coupe la circonférence O sous un angle constant; démontrer que la circonférence variable a pour enveloppe une circonférence.

BIBLIOGRAPHIE

Revue de l'enseignement secondaire spécial et de l'Enseignement professionnel. — *Cette Revue paraît le 15 de chaque mois à la librairie Hachette.*

Nous venons de recevoir le premier numéro d'une publication mensuelle qui se propose de rendre à l'enseignement spécial, créé en France par la loi de 1865, le service de mettre ceux qui s'en occupent au courant de tout ce qui peut intéresser cet ordre d'enseignement en France et à l'étranger. Comme notre publication, la nouvelle Revue traitera des sujets de com-

position ou d'examen se rattachant à son objet particulier; en outre, elle contient es actes officiels concernant l'enseignement spécial, et des questions de pédagogie traitées par des hommes au courant de cet enseignement nouveau. Nous croyons cette Revue appelée à rendre de grands services, et c'est pour cela même que nous nous permettons une légère critique à propos d'un article de mécanique. Les programmes de l'enseignement spécial, même le programme de l'agrégation, ne comportent pas l'emploi du calcul intégral, et, si la nouvelle publication veut être sérieusement utile, elle ne doit pas sortir de son programme, indiqué par son titre même. Elle doit donc chercher à traiter les questions qu'elle aborde par les méthodes indiquées dans les programmes officiels de l'enseignement spécial, et montrer que l'on peut, comme nous l'avons déjà dit à propos de la mécanique de MM. Mondiet et Thabourin, faire un cours élémentaire, et pourtant assez complet pour bien faire comprendre à l'industrie les notions de mécanique dont elle a besoin. A. M.

CORRESPONDANCE.

M. Julliard nous a communiqué un théorème intéressant sur les sections coniques; mais comme sa démonstration est un peu longue et qu'elle s'appuie sur des considérations qui sortent du cadre des mathématiques élémentaires, nous en donnons un autre qui exige seulement la connaissance des propriétés des pôles et polaires.

Théorème. — Soit ABC un triangle circonscrit à une conique, et dont les côtés sont tangents en M, N, P, et soit O un point quelconque du plan. On joint OB, OC qui coupent en H et K la corde de contact NP; les droites OM, BK, CH concourent au même point I.

Démonstration. — Je prolonge BC jusqu'à la rencontre de NP en S; le point M appartient à la polaire du point S par rapport à la conique et aussi à la polaire du point S par rapport à l'ensemble des droites AB, AC. Donc M est conjugué harmonique de S par rapport aux points B et C, et par suite M est sur la polaire de S par rapport à OB, OC. Mais le point I, intersection de CH, BK, appartient à la même polaire; donc la droite OM passe au point I.

M. Julliard applique son théorème au problème suivant : Connaissant trois tangentes à une conique non tracée et deux des points de contact, trouver le point de contact de la troisième tangente. — La solution est immédiate si l'on donne les points N, P, il suffit de prendre un point quelconque O, de joindre OB, OC, puis CH et BK et enfin OI qui passe au point M. On peut aussi prendre la polaire de S par rapport à l'angle BAC; cette polaire passe également au point M. On n'a pas même besoin de construire le point S; il suffit de joindre CP, BN qui se coupent en I′ et de joindre AI′. Cette construction est du reste bien connue, car ce n'est qu'une application du théorème de Brianchon étendu au triangle circonscrit.

J. K.

M. Combier, ingénieur en chef des ponts et chaussées, nous fait remarquer qu'il s'est glissé une erreur dans l'énoncé du premier théorème signalé par M. Dostor, dans le numéro précédent (*voir page 18*). — En effet, pour que l'énoncé ainsi établi soit exact, il faut que les termes extrêmes fassent partie de la progression arithmétique; or si r est de la forme $(4p + 2)$, $\frac{r}{2}$ sera impair, et si n est pair, $(n - 1)$ sera impair; donc, comme une puissance quelconque de n est paire, les termes extrêmes seront impairs, et la progression peut ne contenir que des termes pairs; donc on ne pourra pas trouver les deux nombres impairs $n^{\alpha - 1} - (n - 1)\frac{r}{2}$ et $n^{\alpha - 1} + (n - 1)\frac{r}{2}$ dans la progression. — Du reste, la somme d'un nombre quelconque de nombres pairs ne peut jamais être égale à la puissance entière d'un nombre impair, quel qu'il soit.

Il faut, d'après cela, modifier l'énoncé de la proposition énoncée de la manière suivante : *On peut toujours trouver des progressions arithmétiques, dont la raison est paire, et telles que la somme de* n *termes consécutifs soit une puissance exacte de* n;

En effet si l'on a, en appelant n le premier terme, la relation

$$x + pr = n^{\alpha - 1} - \frac{n - 1}{2} r$$

(c'est la condition pour que le premier des termes donnés soit un terme de progression), je dis que l'on pourra trouver un terme de rang $q + 1$ tel que $x + qr$ soit égal à $n^{\beta - 1} - \frac{n -}{2} r$.

En effet, si l'on a les deux égalités $x + pr = n^{\alpha - 1} - \frac{n - 1}{2} r$.

$$x + qr = n^{\beta - 1} - \frac{n - 1}{2} r,$$

on aura, en retranchant membre à membre, et supposant $\beta > \alpha$, et $q > p$,

$$(q - p) r = n^{\beta - 1} - n^{\alpha - 1} = n^{\alpha - 1}\left(n^{\beta - \alpha} - 1\right)$$

et on pourra prendre $r = 2d$, d étant diviseur de n, et alors $q - p$ sera un nombre entier.

Le théorème IV pourrait amener à une étude analogue.

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 1410-9.

THÉORIE DE L'INCOMMENSURABILITÉ

RÉDIGÉE D'APRÈS LES NOTES PRISES AU COURS DE M. SONGAYLO

Professeur au Collége Chaptal, examinateur d'admission à l'École centrale

Par Maurice d'Ocagne, élève au Collége Chaptal, bachelier ès sciences.

I. **Définition de la limite.** — On appelle *limite* d'une quantité variable une quantité fixe dont la quantité variable se rapproche indéfiniment, de telle façon que leur différence puisse devenir et rester moindre que toute quantité donnée, aussi petite que l'on veut.

Si la quantité variable A est constamment inférieure à la quantité fixe L, mais qu'elle s'en rapproche de manière à ce que la différence L — A devienne et reste plus petite que toute quantité assignable, le nombre L est dit *limite supérieure* de la variable A.

Si, au contraire, la quantité variable A est constamment supérieure à la quantité fixe, mais s'en rapproche indéfiniment de telle façon que la différence A — L puisse devenir et rester plus petite que toute quantité assignable, la quantité L est dite *limite inférieure* de la variable A.

Dans le premier cas, la quantité A est dite *croissante*, et dans le second, *décroissante*.

Théorème I. — *Lorsqu'une quantité variable* A *croît constamment en restant inférieure à une quantité fixe* Q, *elle a une limite.*

La première condition, celle de la croissance continue, est remplie. Pour la seconde, si nous considérons les quantités de même espèce que Q, qui lui sont inférieures, nous voyons qu'il y en a de plus petites que certaines valeurs de A, et d'autres, au contraire, toujours plus grandes que les diverses valeurs de la variable. Par suite, la plus petite des quantités de même espèce que Q supérieures aux valeurs de la variable constitue une limite L : car, d'une part, la variable peut

prendre toutes les valeurs des quantités de même espèce que A inférieures à L, et de l'autre, on peut choisir ces quantités aussi rapprochées de L qu'on veut.

On démontrerait de même que : *lorsqu'une quantité variable décroît constamment en restant supérieure à une quantité fixe, elle a une limite.*

Théorème II. — *Lorsque deux quantités variables* A *et* B *sont constamment égales et que l'une d'elles* A *offre une limite* L, *l'autre* B *offre aussi une limite et cette limite est égale à* L.

Appelons en effet a et b un couple de valeurs égales des quantités variables A et B. Par hypothèse, A croît ou décroît constamment, et comme B est constamment égale à A, elle croît ou décroît de même.

De plus L — a ou a — L peut devenir moindre que toute quantité donnée aussi petite qu'on veut; il en est, par suite, de même de L — b ou b — L.

La quantité B répond donc bien aux deux caractères qui déterminent une limite, et le second caractère montre bien que L constitue cette limite.

II. **Plus grande commune mesure. — Définition de l'incommensurabilité.** — On appelle *commune mesure* de deux quantités, une troisième quantité de même espèce contenue un nombre exact de fois dans chacune d'elles.

On peut se proposer de déterminer la plus grande commune mesure de deux quantités A et B. Pour cela on retranche de la plus grande A la plus petite B autant de fois qu'on le peut. Si B se trouve ainsi contenue un nombre exact de fois dans A, on en conclut que B constitue la plus grande commune mesure cherchée; mais, le plus souvent, il se produit un reste, c'est-à-dire qu'après avoir retranché un certain nombre de fois la plus petite quantité B de la plus grande A, il reste encore une certaine partie R de A, inférieure à B.

Je dis maintenant que la plus grande commune mesure entre B et R est la même que celle entre A et B.

En effet, appelons C la partie de A qu'on obtient en por-

tant sur cette quantité qu'on peut considérer comme une longueur, la quantité B autant de fois qu'on le peut; et soit α la plus grande commune mesure entre B et R. α étant contenue un nombre exact de fois dans R, l'est aussi dans C, et comme par hypothèse elle est contenue un nombre exact de fois dans R, elle le sera par suite dans A: donc c'est une commune mesure entre A et B. C'est la plus grande; en effet, supposons que A et B admettent une commune mesure β plus grande que α. Cette quantité β contenue exactement dans B, l'est dans C, et comme elle l'est dans A, elle le serait dans R. Ce serait donc une commune mesure à B et à R supérieure à α; or α étant, par hypothèse, la plus grande commune mesure entre B et R, cette commune mesure β entre A et B ne peut donc exister et nous sommes, par suite, amenés à chercher la plus grande commune mesure entre B et R. Nous opérerons donc sur ces quantités comme nous venons de le faire sur A et B, et nous continuerons la même opération jusqu'à ce que nous arrivions à un reste R_n contenu un nombre exact de fois dans le précédent R_{n-1}.

R_n est alors la plus grande commune mesure cherchée.

Mais on conçoit qu'en continuant indéfiniment cette opération, on puisse n'arriver jamais à un reste contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent; en un mot, il peut se faire que deux quantités n'admettent pas de commune mesure. Ces deux quantités sont alors dites *incommensurables* l'une par rapport à l'autre.

Or mesurer une quantité c'est chercher la plus grande commune mesure qui existe entre elle et l'unité choisie; si cette commune mesure n'existe pas, la quantité sera incommensurable avec l'unité ou, tout simplement, *incommensurable.*

Mais le résultat de la mesure d'une quantité, lorsque cette mesure est possible, donne naissance à un *nombre.* Les grandeurs incommensurables ne seraient donc pas susceptibles d'être représentées par des nombres. On conçoit cependant que l'on puisse établir certaine relation entre ces grandeurs et l'unité. C'est cette relation que nous allons définir.

III. — **Nombres incommensurables.** — Soit A une quantité incommensurable. Supposons que A contienne m_1 fois et ne contienne pas $m_1 + 1$ fois la $n^e{}_1$ partie de l'unité; les rapports $\frac{m_1}{n_1}$ et $\frac{m_1 + 1}{n_1}$ mesurent deux quantités commensurables A_1 et A'_1 liées à A par la relation

$$A_1 < A < A'_1$$

A_1 diffère de A de moins de $\frac{1}{n}$; on dit que A_1 est la valeur approchée par défaut de A, à $\frac{1}{n_1}$ près; de même A'_1 est la valeur approchée par excès de A, à $\frac{1}{n_1}$ près; nous allons montrer d'abord qu'en faisant croître n_1 suivant une loi convenable, on peut obtenir des valeurs de plus en plus approchées de A.

Supposons, en effet, l'unité divisée en n_2 parties égales, n_2 étant plus grand que n_1. A contiendra m_2 fois cette $n^e{}_2$ partie de l'unité et ne la contiendra pas $m + 1$ fois. Les rapports $\frac{m_2}{n_2}$ et $\frac{m_2 + 1}{n_2}$ mesureront des quantités commensurables A_2 et A'_2 telles que l'on ait

$$A_2 < A < A'_2$$

et A_2 différera de A de moins de $\frac{1}{n_2}$; or on peut donner à n_2 une valeur suffisamment grande pour que la différence entre A_2 et A soit moindre que celle entre A_1 et A, c'est-à-dire pour que A_2 soit compris entre A_1 et A_2. Par suite on aura $A_2 > A_1$.

On pourra de même constituer des approximations $\frac{1}{n_3}$, $\frac{1}{n_4}$, ... auxquelles correspondent des nombres $\frac{m_3}{n_3}$, $\frac{m_4}{n_4}$, ... donnant des valeurs de plus en plus approchées de A.

Si, d'une manière générale, nous appelons $\frac{m}{n}$ la valeur approchée de A par défaut, nous voyons que cette quan-

tité, prenant successivement les valeurs $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, ... est constamment croissante; de plus, elle est toujours inférieure à $\frac{m_1 + 1}{n_1}$ qui mesure la quantité A'_1 plus grande que A; par suite $\frac{m}{n}$ offre une limite; cette limite qui exprime la mesure a de A par rapport à l'unité choisie, est dite *nombre incommensurable.*

Faisons voir maintenant qu'il suffit, pour atteindre cette limite a, que n croisse indéfiniment, d'une manière quelconque. Soient, en effet, $\frac{m_1}{n_1}$ un des nombres répondant aux conditions indiquées plus haut et $\frac{p}{q}$ un nombre quelconque provenant toujours de la comparaison de A avec l'unité. Si P et P′ sont les quantités mesurées respectivement par $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$ on a :

$$P < A < P',$$

P différant de A de moins de $\frac{1}{q}$. Or comme nous disposons de q, nous pouvons supposer q suffisamment grand pour que P soit compris entre A_1 et A; par suite il diffère de A_1 de moins de $\frac{1}{n_1}$.

Lorsqu'on fait alors croître simultanément n_1 et q, le premier en lui donnant successivement les valeurs n_2, n_3,.... le second suivant une loi quelconque, on peut rendre la différence entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{m}{n}$ aussi petite qu'on veut, puisque $\frac{1}{n}$ peut devenir plus petite que toute quantité assignable et comme, d'après ce que nous avons vu on peut rendre $\frac{m}{n}$ aussi approché de a qu'on veut, il en sera de même de $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}$ pour q croissant indéfiniment a donc pour limite a.

De plus $\frac{p+1}{q}$ surpassant $\frac{p}{q}$ de $\frac{1}{q}$, et $\frac{1}{q}$ devenant infiniment petit quand q devient infiniment grand, il en résulte que $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$ tendent vers la même limite et que, par suite, $\frac{p+1}{q}$ a aussi pour limite a. (*A suivre.*)

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

Généralités. — La théorie des ombres a pour but, connaissant la position d'une ou plusieurs sources de lumière directe, de déterminer sur la surface des corps les portions de ces surfaces qui sont éclairées et celles qui sont dans l'ombre.

La théorie du lavis a pour objet d'étudier les différences d'éclat ou de couleur que présentent ces surfaces en ayant égard :

1° A la manière dont leurs différents éléments reçoivent la lumière directe ou les reflets ;

2° Aux positions que ces éléments occupent par rapport au spectateur.

Elle donne la marche à suivre pour rendre ces différences sur les dessins à l'aide de couleurs, couleurs parmi lesquelles nous rangerons l'encre de Chine ou tout autre ton servant à produire les effets de l'ombre.

La théorie du lavis sera basée sur l'étude de trois principes :

1° Le principe des orientations ;

2° Le principe des couleurs ;

3° Le principe des distances.

Principe des orientations. — L'orientation d'un plan ou d'un élément plan de surface dépend de la position qu'occupe ce plan,

1° Par rapport aux corps lumineux, 2° par rapport aux rayons visuels qui émanent du spectateur.

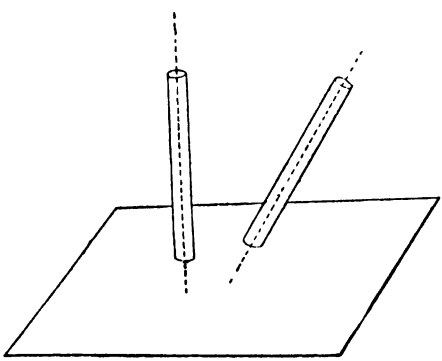
Rayons lumineux et rayons visuels. — Dans le dessin géométrique, les rayons lumineux sont parallèles et ont leurs deux projections inclinées à 45° sur la ligne de terre.

Le spectateur est supposé placé à l'infini, soit au-dessus du plan horizontal, soit en avant du plan vertical, cela dépend de la projection qu'il regarde. Dans tous les cas, les rayons visuels sont perpendiculaires au plan sur lequel se fait la projection.

Corps dépolis et corps polis. — La lumière, en frappant la surface d'un corps, peut être renvoyée de deux manières différentes suivant que ce corps est dépoli ou poli. Dans le premier cas, la lumière est diffusée dans tous les sens; dans le second cas, elle est réfléchie spéculairement.

Expérience sur les corps dépolis. — On prend un plan parfaitement dépoli, une plaque recouverte de plâtre, par exemple, ou de papier blanc non glacé que l'on éclaire par la lumière solaire.

Ce plan s'éclaire uniformément et paraît d'une teinte blanche parfaitement unie.

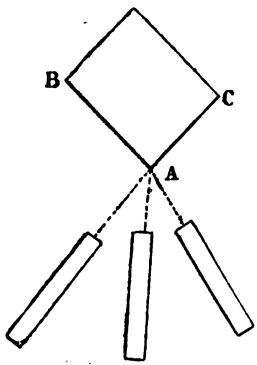


On prend un tube, noirci intérieurement au noir de fumée pour éviter les réflexions intérieures, et à l'aide de ce tube on regarde le plan dans toutes les directions.

L'extrémité ouverte paraît un rond blanc d'un certain éclat, dont il est impossible de saisir les variations quand on change l'inclinaison du tube, excepté lorsque l'on est très-près de l'incidence rasante, auquel cas il se produit

un assombrissement dû aux aspérités de la surface qui se recouvrent les unes les autres et qui présentent chacune leur partie dans l'ombre.

Ces effets sont les mêmes que ceux qui se produisent avec une plaque de métal rougie au feu et devenue source de lumière.

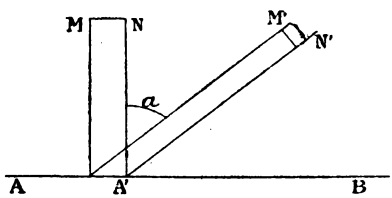


On peut faire l'expérience d'une manière plus concluante. On prend un prisme de plâtre dont l'une des arêtes est bien vive et on l'éclaire de telle sorte que deux de ses faces AB, AC, paraissent également éclatantes.

Avec le tube précédent, on regarde l'arête A, et quelle que soit la direction du tube, les deux faces paraissent également lumineuses.

Conséquences. — 1° Un élément plan d'une surface dépolie se conduit, une fois éclairé par une source de lumière, comme un corps lumineux par lui-même.

2° L'intensité des rayons émis par la surface est proportionnelle au cosinus de l'angle fait par les rayons émis avec la normale à la surface. Nous nommerons cet angle l'angle d'émission. En effet : soit Q la quantité de rayons émis normalement par un élément de surface égal à A; Q' la quantité émise par le même élément sous l'incidence α.



Les premiers forment un cylindre dont la section droite est MN = A.

Les seconds en forment un autre de section droite M'N' = MN cos α = A cos α. Puisque, vu sous ces deux directions, l'élément paraît également éclatant, c'est que les

quantités de rayons reçus sur l'unité de surface en section droite sont égales dans les deux cas.

Ces quantités sont :

$\frac{Q}{A}$ pour la direction normale, et $\frac{Q'}{A \cos \alpha}$ dans la 2e direction.

On a donc : $\frac{Q}{A} = \frac{Q'}{A \cos \alpha}$ $\quad Q' = Q \cos \alpha$; c. q. f. d.

3° L'éclat apparent d'une surface dépolie ne dépend pas de la position du spectateur, mais uniquement de l'intensité de la source lumineuse et de l'angle sous lequel la lumière directe frappe cette surface.

4° Sur une surface dépolie, éclairée par une source unique de rayons lumineux, les lignes d'égal éclat apparent sont les lignes d'égal éclairement.

Éclairement total. — Éclairement unitaire ou spécifique d'une surface plane. — L'éclairement total d'une surface plane égale à A est la quantité totale Q de lumière reçue par cette surface.

L'éclairement unitaire ou spécifique serait la quantité de lumière $\frac{Q}{A}$ reçue par l'unité de surface.

L'éclairement spécifique est important à considérer. Une surface dépolie nous semblera également éclatante si son éclairement unitaire ou spécifique est le même partout.

Théorème. — L'éclairement unitaire d'un élément de surface est proportionnel au cosinus de l'angle d'incidence des rayons lumineux.

En effet, soit ABCD un prisme à section droite carrée, servant d'enveloppe à toute une série de rayons lumineux en quantité Q, un premier plan P, normal aux rayons lumineux, recevra une quantité de lumière représentée par Q.

Soit A la section droite du prisme, l'éclairement unitaire du plan P sera : $E = \frac{Q}{A}$.

Un plan P' incliné sur le plan précédent d'un angle α sera coupé par le prisme suivant une section de surface égale

à $\frac{A}{\cos \alpha}$. La quantité de lumière reçue sera toujours Q et l'éclairement unitaire.... $E_1 = \frac{Q \cos \alpha}{A}$.

On a donc : $E_1 = E \cos \alpha$; c. q. f. d.

Conséquence. — Sur une surface dépolie, les lignes d'égal éclairement et par suite d'égal éclat sont les lignes d'égale incidence.

Rayons de reflets ou indirects. — Si la lumière solaire était unique, si elle ne donnait pas lieu à des reflets, tous les points dans l'ombre seraient absolument noirs. Or, il n'en est rien ; ces points sont dans des demi-teintes d'éclat variable. Les ombres sont donc éclairées par des rayons indirects que nous nommerons rayons de reflets et dont nous allons étudier la nature et les effets.

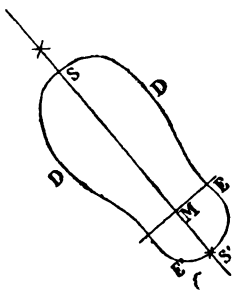
Les rayons de reflets ou indirects peuvent provenir de la masse d'air environnante ou des objets situés dans le voisinage.

Nous ne nous occuperons de cette seconde espèce de reflets que dans le dessin d'architecture, et nous admettrons ici que les objets que nous représentons sont comme des aérostats isolés au milieu de l'atmosphère et à une distance assez grande de la terre pour ne pas en éprouver les reflets.

Courbe représentative des reflets atmosphériques. — Sans chercher à les justifier théoriquement, nous admettrons les résultats qui suivent ; ils ne sont pas complétement exacts, mais nous en tirerons des conséquences simples se rapprochant suffisamment de la réalité.

Lorsqu'on regarde le ciel avec une lunette dont l'objectif est remplacé par un verre dépoli, l'éclat maximum de ce verre a lieu lorsque l'on fixe le soleil. Lorsque la direction s'en éloigne, l'éclat diminue très-rapidement, si bien que pour un angle de 30° du soleil, l'éclat est environ quatre fois plus faible que pour un angle de 3°. Cet éclat passe par un minimum qui répond environ à un angle de 90°, augmente ensuite faiblement, et repasse par un maximum relatif pour un angle de 180°, c'est-à-dire par le point du ciel directement opposé au soleil.

Soit M un élément plan très-petit sur lequel agissent toutes les sources de lumière directe ou indirecte émanant du soleil ou de l'atmosphère. Si de ce point nous menons des rayons vecteurs dans toutes les directions, et si nous portons sur ces rayons des longueurs proportionnelles aux intensités lumineuses dont nous venons de parler, nous aurons une courbe représentative qu'il suffira de faire tourner autour de SM pour avoir la surface représentative des éclairements dus à la lumière directe et aux reflets atmosphériques sur un plan qui serait chaque fois normal aux rayons vecteurs.



Cette courbe présente deux maxima : le premier, très-considérable, correspond aux rayons directs SM ; le second, beaucoup moins intense, correspond aux rayons inverses S'M ; et un minimum que l'expérience seule pourrait déterminer et que nous ferons correspondre, pour simplifier, aux directions ME, ME' perpendiculaires sur le rayon direct.

Rayon atmosphérique principal. — Les choses se passeront donc à peu près comme si nous avions deux soleils, l'un dirigé suivant la direction MS, qui serait le plus lumineux et qui nous enverrait les rayons directs; l'autre dirigé suivant MS' et qui nous lancerait des rayons que nous appellerons *rayons atmosphériques principaux.*

Il faudrait y joindre, cependant, une infinité d'autres sources de lumière symétriquement placées par rapport à la ligne SS' et envoyant des rayons dont les effets sur un plan donneront en se totalisant des éclairements représentés en grandeur par les rayons vecteurs MD, ME normaux aux plans. Nous nommerons ces rayons indirects les *rayons atmosphériques ordinaires.*

Conséquences. — 1° Si nous masquons le soleil à un

élément de surface, cet élément sera éclairé par les rayons indirects qui lui viendront du ciel;

2° Plus il y aura de rayons indirects qui seront masqués, plus l'ombre sera noire, et inversement;

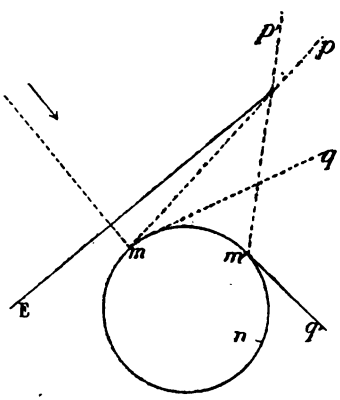
3° De deux éléments placés dans l'ombre, celui qui sera normal au plus grand rayon vecteur sera le plus éclairé;

4° L'ombre portée par un corps sur un autre diminue d'intensité lorsque la distance relative augmente: en effet, lorsque l'objet qui porte ombre est placé près, il masque un plus grand nombre de rayons atmosphériques que lorsqu'il est loin;

5° La ligne d'ombre propre, ayant ses éléments normaux à la direction des rayons vecteurs les moins intenses, sera plus noire que tout autre élément de surface pris dans l'ombre propre, sans être cependant complétement noire;

6° Lorsqu'une surface courbe possède une de ses régions dans l'ombre portée par une autre surface, cette région ne reçoit plus ni les rayons directs ni les rayons atmosphériques voisins des rayons directs et qui sont les plus intenses.

Prenons deux éléments de surface, l'un voisin de l'incidence normale m et l'autre m' voisin de la ligne d'ombre propre :



Pour fixer les idées imaginons que l'écran E, qui projette une ombre soit très-grand. L'élément m reçoit les rayons atmosphériques compris entre le plan mp et le plan tangent mq, lesquels viennent le frapper très-obliquement, et l'éclairent très-peu.

L'élément m', à son tour, reçoit les rayons bien plus nombreux, compris entre $m'p'$ et $m'q'$ parmi lesquels un grand nombre le frappent normalement.

L'élément m' sera donc plus éclairé que m.

Conclusions. — (A) Dans l'ombre propre, un élément n sera d'autant plus éclairé par l'ensemble des rayons

atmosphériques qu'il l'eût été davantage par le rayon atmosphérique principal supposé existant seul.

(B) Dans l'ombre portée, un élément *m* ou *m'* sera d'autant plus sombre qu'il eût été plus clair, si cette ombre portée n'eût pas existé.

(C) Les lignes d'égales teintes dans l'ombre portée seront les mêmes que si cette ombre n'existait pas; seulement les zones qu'elles sépareront seront d'autant plus noires qu'elles eussent été plus éclairées sans l'existence de cette ombre portée.

(D) Dans l'ombre propre, les lignes d'égales teintes se traceront en faisant l'hypothèse d'un soleil fictif, existant seul et directement opposé au soleil réel. Par conséquent, si le corps est dépoli, les lignes d'égales teintes étant les lignes d'égale incidence, on les obtiendra en continuant le tracé de celles qui correspondent à la partie éclairée de la surface et comme si les rayons directs étaient susceptibles de les atteindre.

Lignes d'égales teintes sur une sphère dépolie (Épure). — Le rayon lumineux a été rendu parallèle au plan vertical, nous désignerons par φ l'angle qu'il fait avec la ligne de terre.

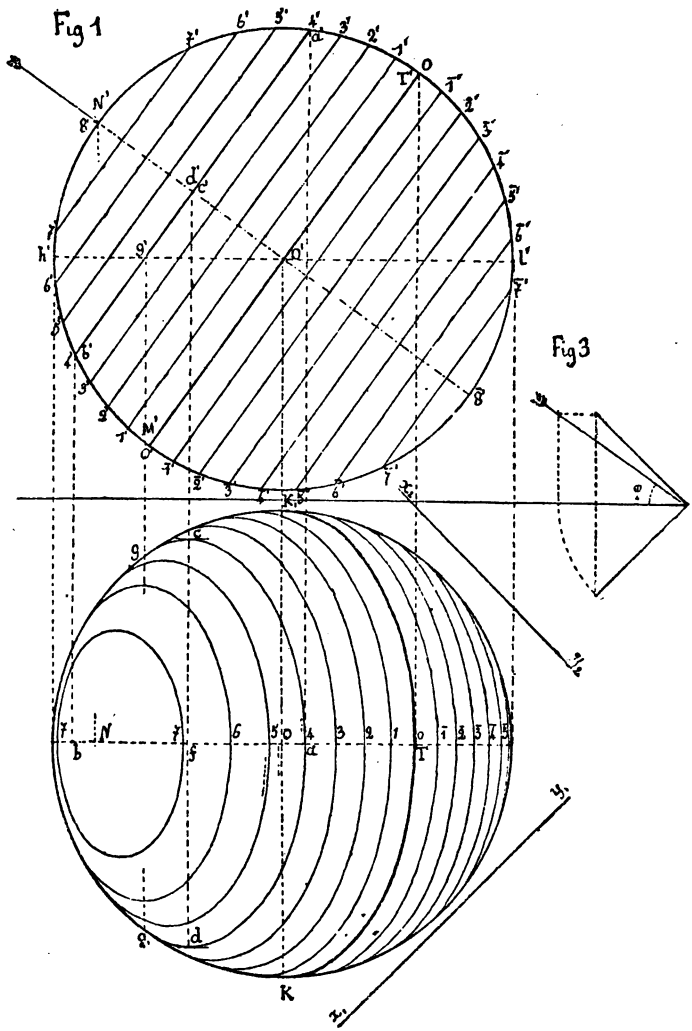
On a $$\text{tang}\ \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le plan MN d'incidence normale est le point le plus clair. Les lignes d'égale incidence et par suite d'égales teintes s'obtiendront en coupant par des plans perpendiculaires au rayon lumineux. Le nombre de ces plans est arbitraire ainsi que leurs distances relatives.

On a pris 7 plans équidistants, ce qui correspond à des angles d'incidence dont les cosinus décroissent en progression arithmétique.

Les lignes ainsi obtenues ont été désignées par des nombres positifs dans la partie en lumière et par des nombres négatifs dans celle qui est dans l'ombre. La ligne d'ombre propre est la ligne de teinte n° 0.

En prenant pour nouvelle ligne de terre la droite à 45°,



x_1 y_1 la sphère se présente comme si elle était en projection verticale avec le rayon lumineux ramené à 45°.

En prenant x_2 y_2 pour ligne de terre, on voit la sphère en projection horizontale.

Remarque. — Dans une sphère dépolie, la zone la plus claire est très-voisine du contour apparent.

(*A suivre.*)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Combier**, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

La note qui suit, en s'appliquant à quelques problèmes dont la solution géométrique est connue, a pour but simplement de montrer le secours que peut rendre le calcul dans l'étude des solutions des problèmes de géométrie, et comment on peut, dans certains cas, déterminer les éléments d'une figure qu'on ne pourrait construire avec la règle et le compas, d'après les seules données.

I. **Théorème.** — Soient a, b, c les côtés d'un triangle rangés par ordre de grandeur croissante;

s sa surface;

a' b' c' les hauteurs de ce triangle respectivement opposées aux côtés a, b, c.

Je suppose qu'il soit possible de construire un triangle avec a', b' et c' pour côté (ce qui n'a pas toujours lieu), et je désigne par s' la surface de ce second triangle en même temps que j'appelle a'', b'', c'' ses trois hauteurs.

Avec a'', b'', c'' pour côtés, je décris un troisième triangle ayant pour hauteurs correspondantes a''', b''', c'''; puis avec les trois hauteurs de ce troisième triangle pour côtés, j'en construis un quatrième et ainsi de suite indéfiniment; je dis :

1° *Que tous les triangles de rang impair sont semblables entre eux, que tous les triangles de rang pair sont également semblables entre eux, mais non aux premiers.*

2° *Que la série des surfaces de tous ces triangles* s, s', s'', *etc., forme une progression géométrique décroissante.*

En effet on a : $2s = aa' = bb' = cc'$

$$2s' = a'a'' = b'b'' = c'c''$$

et par suite $$\frac{s'}{s} = \frac{a''}{a} = \frac{b''}{b} = \frac{c''}{c} \qquad (1)$$

Donc le troisième triangle construit avec a'', b'' et c'' pour côtés est semblable au premier construit avec a, b et c pour

côtés, et si on appelle s'' la surface de ce troisième triangle, on aura :

$$\frac{s''}{s} = \left(\frac{a''}{a}\right)^2. \qquad (2)$$

Les surfaces des triangles semblables étant entre elles comme les carrés des côtés homologues, la comparaison des équations (1) et (2) donne

$$\frac{s'^2}{s^2} = \frac{a''^2}{a^2} = \frac{s''}{s}$$

d'où

$$s'^2 = ss''$$

La surface s' est donc moyenne proportionnelle entre celle du triangle précédent et celle du suivant.

Le théorème énoncé est donc démontré.

La raison de cette progression dépend du rapport des côtés du triangle qui sert de point de départ.

II. **Théorème**. Soient a, b, c les trois côtés d'un triangle ; s sa surface ;

a', b', c' les trois lignes médianes correspondant aux côtés a, b, c;

s' la surface d'un second triangle construit avec les trois lignes médianes du premier triangle, pour côtés a'', b'', c'' les trois lignes médianes de ce second triangle ;

s'' la surface d'un troisième triangle construit avec a'', b'', c'' pour côtés ;

s''' la surface d'un quatrième triangle construit avec les trois lignes médianes du précédent et ainsi de suite indéfiniment.

Je dis :

1° *Que tous les triangles de rang impair sont semblables entre eux, que tous les triangles de rang pair sont également semblables entre eux, mais non aux autres ; que le rapport de similitude d'un triangle au suivant dans chaque série est constant et égal à* 3/4.

2° *Que la série des surfaces* s, s', s'', s''',... *forme une progression géométrique dont la raison est* 3/4.

En vertu d'un théorème connu on a dans le premier triangle

$$\left\{\begin{aligned} 4a'^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ 4b'^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2 \\ 4c'^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2 \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

de même que dans le second

$$4a''^2 = 2b'^2 + 2c'^2 - a'^2$$

et en vertu des équations (1)

$$4a''^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} + a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$$

d'où $\quad a''^2 = \frac{9}{16} a^2 \qquad a'' = \frac{3}{4} a$

on aura de même $\quad b'' = \frac{3}{4} b$

$$c'' = \frac{3}{4} c.$$

Donc le troisième triangle est semblable au premier comme il l'est au cinquième, etc., et le rapport de similitude d'un triangle de la série impaire, ou de la série paire au précédent est bien égal à 3/4.

Pour calculer la surface s' on se servira de la formule

$$s' = \frac{1}{4}\sqrt{4a'^2b'^2 - (a'^2 + b'^2 - c'^2)^2}$$

dans laquelle on remplacera a'^2, b'^2 et c'^2 par leur valeur tirée des équations (1) et on aura

$$s' = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4} - \frac{(5c^2 - a^2 - b^2)^2}{16}}$$

et en effectuant les calculs

$$s' = \frac{1}{16}\sqrt{9(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2)}$$

$$s' = \frac{3}{16}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} = \frac{3}{4} s$$

mais le rapport de similitude du triangle s'' au triangle s étant 3/4 on a : $\quad s'' = \frac{9}{16} s = \frac{3}{4} s'$.

La série des surfaces s, s', s'', ... forme donc une progression géométrique dont la raison est 3/4.

La somme des surfaces $s + s' + s'' + \ldots\ldots$ prolongée indéfiniment a donc pour limite

$$\frac{s}{1 - \frac{3}{4}} = 4s.$$

(*A suivre.*)

MÉLANGES

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Par le Dr **Henri Suter**, de **Zürich**, traduite par M. A.-G. Melon.

(*Suite*, voir tome II page 311.)

LA SCIENCE CHEZ LES GRECS

Son importation. — Ses progrès jusqu'à la fondation de l'École d'Alexandrie.

Les sciences appliquées, nous l'avons déjà fait remarquer, ne jouissaient pas, à l'école platonicienne, de la même faveur que les sciences abstraites. Par suite, l'astronomie n'a pas fait de progrès sensibles dans la période qui s'est écoulée depuis *Platon* jusqu'à *Aristarque*. La spéculation philosophique avait encore des racines trop profondes pour que les efforts isolés de quelques hommes pussent ébranler son ancienne domination. Le grand *Platon* lui-même était un adepte zélé du mysticisme pythagoricien, et, partant, un ennemi déclaré de toute conception plus réelle, plus tangible. Nous n'approfondirons pas ici ses opinions spéciales sur l'essence des choses de la nature, opinions qu'il a fait connaître dans plusieurs de ses ouvrages, particulièrement dans le *Timée*; elles n'ont aucune importance sérieuse au point de vue du développement ultérieur de l'astronomie. Nous nous bornerons à un rapide examen des théories du mathématicien déjà cité *Eudoxos* de *Knide*.

Ce dernier résida longtemps en Égypte; et, d'après *Sénèque* (*Quæst. nat.*, l. VII), il rapporta de ce pays la connaissance des mouvements planétaires. Quoi qu'il en soit, il est certain qu'*Eudoxos* a, le premier, cherché à expliquer le mouvement irrégulier des planètes; les Ioniens et les Pythagoriciens ne l'avaient pas encore étudié de près; ils avaient attribué à chaque planète une sphère de rotation déterminée, unique. *Aristote* (*Métaph.*, XII, 8) nous expose

les essais d'*Eudoxos* pour expliquer ces irrégularités. Il avait, à cet effet, supposé quatre sphères dans lesquelles la planète se mouvait en même temps : la première sphère était celle des étoiles fixes; c'était celle qui produisait le mouvement diurne; la seconde déterminait le mouvement dans l'écliptique et donnait la longitude; la troisième avait son axe également perpendiculaire à l'écliptique, mais elle tournait dans une direction opposée à la direction de la seconde sphère, ce qui devait expliquer le mouvement rétrograde; et, enfin, la quatrième servait à expliquer les changements en latitude. Pour les mouvements du soleil et de la lune, *Eudoxos* n'admettait que les deux premières et la dernière sphère. Ces hypothèses d'*Eudoxos*, bien que difficiles à comprendre et correspondant peu aux phénomènes naturels, trouvèrent un crédit assez considérable chez les astronomes de l'époque; elles ont, dans tous les cas, beaucoup contribué à l'édification de la théorie d'*Hipparque*. *Eudoxos* aurait été aussi un habile observateur; on montrait à *Knide*, longtemps après sa mort, la tour où il avait fait ses observations.

A cette époque, les sciences physiques reçurent une impulsion puissante et subirent une réforme féconde de la part d'un des plus grands philosophes de tous les temps, du génie universel de l'antiquité, d'*Aristote*, élève de *Platon*. Cet homme célèbre naquit en l'an 384 avant J.-C. à *Stagira*, en Macédoine. Il déploya dès sa jeunesse un grand zèle à s'instruire et à pousser ses investigations dans toutes les parties de la science humaine. La renommée de *Platon* l'attira à *Athènes* dans sa dix-septième année. Il profita pendant vingt ans des enseignements de *Platon*; puis, après la mort de ce philosophe, il se rendit à l'appel de Philippe de Macédoine qui lui confia l'éducation de son fils Alexandre. *Aristote* exerça une grande influence sur l'esprit et le caractère du fils de Philippe. Lorsqu'Alexandre entreprit la campagne de Perse, Aristote se retira à Athènes et y fonda au Lycée la célèbre école péripatéticienne, tandis que les élèves de Platon, sous la conduite de Xénocrate, occupaient l'Académie.

Des persécutions qu'il s'attira par ses théories et provoquées par la défaveur de son ancien élève, le grand Alexandre, le forcèrent, dans un âge avancé, à quitter Athènes et à se retirer à Chalkis dans l'île d'*Eubœa* où il put s'adonner, sans trouble, à ses études favorites jusqu'à sa mort qui arriva en l'an 321 avant J.-C.

Le principe de la philosophie naturelle d'Aristote consiste à rassembler les observations et les expériences afin de remonter, par déduction logique, aux principes des choses. Et cette voie aurait été vraiment la seule bonne pour conduire à la connaissance des phénomènes et des lois de la nature, si les subtilités dialectiques de sa métaphysique ne l'avaient souvent fait aboutir aux théories les plus bizarres. Il voulait aussi transporter dans le domaine des sciences naturelles la logique rigoureuse des mathématiques pures, et il commit la faute grave de subordonner la matière, les faits matériels, à la forme. Ses conclusions hardies, souvent « *géniales* », souvent étranges, furent rarement bien comprises, et fournirent à la postérité prétexte aux interprétations les plus diverses. C'est ainsi que les théories du premier et du plus grand *empirique* de l'antiquité eurent la singulière fortune de rester pendant des siècles les lois fondamentales de la théologie scolastique du moyen âge, et que la gloire d'avoir donné définitivement la victoire et la suprématie aux sciences de la nature ne se rattache pas au nom d'Aristote. Mais son grand mérite reste toujours d'avoir, par son intelligence claire et pénétrante ainsi que par sa logique rigoureuse, porté l'unité et l'ordre dans le grand chaos des sciences, et d'avoir ainsi prescrit à chacune d'elles sa voie précise et certaine.

C'est dans les écrits « Περὶ τοῦ οὐρανοῦ », « Προβλήματα μηχανικά », et « Ἀκροάσεις φυσικαί », qu'Aristote a consigné ses opinions sur l'astronomie, la mécanique et l'histoire naturelle.

Nous serions entraînés trop loin si nous voulions examiner de près ses nombreuses propositions et théories. Nous n'ajouterons que quelques mots pour caractériser sa philosophie. Dans le livre « Περὶ τοῦ οὐρανοῦ », Aristote s'exprime comme il suit sur la forme sphérique du ciel et de l'univers : « Le

cercle étant la plus parfaite de toutes les surfaces parce qu'il n'est limité que par *une seule* ligne, fermée en elle-même, la sphère est aussi le plus parfait de tous les corps, car elle se produit par la rotation du cercle. Mais le ciel doit avoir la forme la plus parfaite; donc il est sphérique. » En outre, il n'admet en dehors du ciel aucun espace vide, ce qui est aussi pour lui une preuve de la forme sphérique du ciel, parce qu'un corps anguleux, dans sa rotation, ne remplirait pas partout le même espace. — Au sujet de la forme sphérique de la terre, Aristote reste plus volontiers sur le terrain de l'observation. Ici il fut le premier qui présenta comme preuves les raisons admises encore aujourd'hui. « Si l'on s'avance, dit Aristote, vers l'occident ou vers le septentrion, les étoiles se lèvent devant nous de plus en plus haut; par conséquent la terre est recourbée dans les deux directions. » Il conclut en outre la forme sphérique de la terre de ce fait que, dans les éclipses de lune, l'ombre de la terre est toujours circulaire. Enfin il en donne comme cause la tendance des parcelles pesantes de la terre à tomber vers le centre de celle-ci; c'est pourquoi elles doivent être situées à égale distance autour de son centre, et former une sphère.

La théorie du mouvement appartient aux spéculations les plus subtiles de la métaphysique d'Aristote, mais nous ne développerons point les grandes et étranges séries d'argumentations et de conclusions de notre philosophe; ce serait fatigant pour le lecteur. Pour terminer, nous nous bornerons à citer sa démonstration de la perfection du monde. «Les choses, dit-il, dont le monde se compose, sont toutes des corps solides; elles ont donc *trois* dimensions. Mais *trois* est le plus parfait des nombres : il en est le premier, car *un* n'est pas encore un nombre et au lieu de *deux* on peut dire *un couple* (1); mais *trois* est le nombre par lequel nous pouvons désigner *tout*; en outre, le nombre *trois* a un commencement, un milieu et une fin. » — Cette dialectique de sophiste serait bien propre à diminuer considérablement à nos yeux

(1) *Beide*; ἄμφω en grec. Le français n'a pas de synonyme comme l'allemand et le grec.

la gloire d'Aristote, si nous n'apercevions dans d'autres directions l'éclat de son esprit pénétrant et lucide.

Les mathématiques pures n'étaient considérées, dans l'école d'Aristote, que comme une science auxiliaire; c'est pourquoi cette école n'a pas donné à cette science d'accroissement remarquable. Aristote était d'ailleurs très-versé dans les mathématiques, témoin les nombreux passages de ses écrits dans lesquels il s'appuie sur des théorèmes mathématiques ou bien les discute. Les principes fondamentaux exercèrent aussi son talent dialectique, et l'on doit à sa logique rigoureuse l'avantage, qui ne saurait être estimé trop haut, d'une démonstration plus claire.

Bien que nous ne puissions attribuer à Aristote ou à ses élèves aucun progrès essentiel en mathématiques, cependant deux d'entre eux ont fait une œuvre utile : ils ont exposé le développement historique de la science jusqu'à cette époque, et, par là, ils ont contribué indirectement à la réunion des éléments par Euclide. Ces deux disciples ont déjà été cités plusieurs fois; ce sont *Théophraste* d'*Erèse*, et *Eudème* de *Rhodes*. Tous deux ont écrit une histoire de la géométrie et de l'astronomie jusqu'à Aristote; malheureusement ces deux ouvrages sont perdus. C'est particulièrement à ces dernières *sources* que puisèrent les auteurs qui ont écrit sur les découvertes astronomiques et mathématiques des philosophes grecs. C'est à *Eudème* que nous devons les quelques rayons de lumière qui nous permettent parfois de jeter un rapide coup d'œil dans la période ténébreuse qui précède *Euclide*.

Il nous reste à citer trois hommes qui vivaient à l'époque d'Aristote et qui se sont distingués dans l'astronomie et la géographie. Ce sont *Dikaearchos* de Messine, *Autolykos* de Pitomœa, et *Pytheas* de Massilia (Marseille).

Le premier est connu pour ses mesures de hauteur de diverses montagnes par des procédés géométriques, et pour sa géographie de la Grèce. Nous avons d'*Autolykos* deux ouvrages d'astronomie sur l'ascension et la déclinaison des étoiles, et sur la sphère mobile; ils ont été traduits et expliqués par divers commentateurs. Le plus célèbre est

Pytheas, né dans la colonie grecque de Marseille; il se fit dans l'antiquité une grande renommée par ses voyages fabuleux. On rapporte qu'il pénétra, dans le nord de l'Europe, jusqu'à l'île de *Thulé* qui est aujourd'hui généralement désignée sous le nom d'Islande. Il se distingua aussi en astronomie par les observations qu'il fit à Marseille; il arriva à déterminer les latitudes de plusieurs stations d'une manière assez précise. Strabon, dans ses écrits, parle de ce savant en plusieurs endroits et fait de son mérite un grand éloge.

Lorsque la nation grecque eut son indépendance ravie par les rois de Macédoine, Philippe et Alexandre, les sciences se retirèrent toujours davantage de son sein. Athènes ne fut pas le centre autour duquel gravitèrent les forces vives de l'empire macédonien. Aussi l'Égypte, avec sa nouvelle ville Alexandrie, s'éleva-t-elle rayonnante au-dessus de tous les autres États que fit naître le partage de l'empire, et la Grèce fut éclipsée et reléguée au dernier plan, dans l'obscurité. L'étude rationnelle des sciences positives fit place en Grèce à une philosophie spéculative toujours plus profonde et plus nuageuse, tandis que sous la direction de *Ptolémée* elle fut cultivée avec le plus grand éclat, et atteignit cette élévation admirable qui, durant seize siècles, laissa bien au-dessous d'elle la culture européenne.

(*A suivre.*)

CONCOURS ACADÉMIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

Concours de 1867.

— Résoudre le système d'équation $ax + by = 1$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$$

dans lesquelles a et b désignent des quantités positives. Discuter.

— Prouver que, si l'on mène la bissectrice de chacun des angles extérieurs d'un triangle et que l'on prolonge chaque bissectrice jusqu'au côté opposé à l'angle, les trois points d'intersection sont en ligne droite.

Concours de 1868.

— Prouver que, si trois circonférences ont une corde commune, si d'un point de l'une d'elles on mène des tangentes aux deux autres, le rapport de ces tangentes est constant.

Concours de 1869.

— Résoudre l'équation $\frac{p}{\text{coséc } x} + \frac{q}{\text{séc } x} = r$.

— Etant données deux circonférences sécantes, on mène les quatre tangentes aux points d'intersection; puis on projette le centre de chacune des circonférences sur chacune de ces tangentes, ce qui donne huit points qui se réduisent à six; démontrer que ces six points sont sur une même circonférence.

Concours de 1870.

— Inscrire dans un quadrilatère donné un parallélogramme de surface donnée, et dont les côtés sont parallèles aux diagonales du quadrilatère.

— On a, dans un plan, deux circonférences de centres C et C', qui se coupent aux points I et J. D'un point quelconque de IJ, on mène une tangente MA à la circonférence C, et une tangente MA' à la circonférence C'. On joint les points de contact A et A' par la corde AA', qui rencontre les circonférences B et B'. Démontrer que les rayons CA, C'B' sont parallèles, ainsi que les rayons CB et C'A'.

— Justifier la formule $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, dans laquelle a, b, c, d, représentent des nombres quelconques.

Concours de 1872.

— Etant données deux tangentes à une circonférence, mener, par un point de la circonférence, une tangente limitée aux deux premières, telles que la partie comprise entre les deux tangentes soit d'une longueur donnée.

— Résoudre le système
$$x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$
$$xy + xz - yz = 7,$$
$$x + y + z = 6.$$

Concours de 1873.

— On donne un cercle et deux tangentes rectangulaires. Mener une troisième tangente telle que le triangle formé par ces trois tangentes ait une surface donnée. Maximum et minimum du triangle.

— Inscrire et circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire. Calculer les rayons de ces sphères : 1° dans le cas d'une pyramide triangulaire régulière dont les arêtes sont a et b; 2° dans le cas d'un tétraèdre régulier.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

CAEN 1862.

— Trouver les dimensions d'un parallélépipède rectangle connaissant la somme des douze arêtes, la somme des faces latérales et la somme des bases.

DIJON 1873.

— Une droite étant donnée par ses traces, on demande de construire les traces du plan passant par cette droite et faisant un angle donné avec le plan qui la projette sur le plan horizontal.

— Par un point pris dans le plan d'un angle droit, on mène une droite mobile rencontrant les deux côtés de cet angle. Quel est de tous les triangles rectangles que l'on peut former de cette manière, celui qui a l'aire minima?

— Calculer les longueurs des bissectrices intérieures des trois angles d'un triangle rectangle en fonction des côtés de l'angle droit.

— Couper un tronc de cône à bases parallèles par un plan parallèle aux bases de façon que la surface latérale soit coupée en deux parties équivalentes.

— On donne une circonférence de rayon R et une droite située à une distance d du centre; construire un carré dont un côté soit une corde de la circonférence et dont le côté opposé soit sur la droite. — Discuter.

— Construire un triangle isoscèle connaissant la base a et la longueur b des médianes aboutissant aux extrémités de cette base. Exprimer la valeur commune de ces côtés en fonction de a et b.

— Les traces d'un plan font avec la ligne de terre des angles de 30° et 45°. On demande les angles formés par ce plan avec les plans de projection et avec un plan de profil.

GRENOBLE 1855.

— Un convoi parti à 8 h. 30 m. du matin d'une des extrémités d'un chemin de fer de 471 kilomètres, doit mettre 6 h. 40 m. pour atteindre l'autre extrémité; on veut qu'un autre convoi parti à 9 h. 40 m. rejoigne le premier à 356 kilomètres du point de départ; quelle doit être la vitesse moyenne de ce second convoi?

— En supposant que la terre soit une sphère parfaite, trouver le rapport de la zone torride à la surface de la terre; on sait que les tropiques sont à 23° 27′ de l'équateur.

MARSEILLE 1858.

— Étant donnés les trois côtés d'un triangle ABC, savoir :

$$AB = 1750^m$$
$$BC = 1520^m$$
$$AC = 1600^m$$

trouver la longueur de la bissectrice de l'angle A.

— Un triangle équilatéral, un carré et un cercle ont chacun un périmètre de 4 mètres. Trouver le rapport de leurs surfaces.

MARSEILLE 1859.

— Peut-on augmenter d'une même quantité les lignes 1, 2, 3 de manière à rendre possible la construction d'un triangle rectangle? Avec les résultats obtenus, calculer les angles de ce triangle.

MARSEILLE 1860.

— Une bille va de A en B, après avoir touché la bande CD d'un billard; on donne AB = 2 mètres. Les distances des points A et B à la bande CD sont respectivement 1 mètre et 1^m, 50. Trouver la longueur du chemin que parcourt la bille.

— On fait tourner un rectangle autour de ses deux côtés. Les deux volumes sont respectivement 40000 et 50000 mètres cubes. Trouver la diagonale du rectangle.

NANCY 1857.

1. — Une sphère creuse en cuivre ayant 0^m, 35 pour diamètre de surface extérieure est successivement pesée pleine de mercure et pleine d'eau; le rapport du premier poids au deuxième est égal à 5,20. On demande le volume de la couche sphérique. — Densité du cuivre, 8,78; densité du mercure, 13,60.

2. — Étant donné un cercle de 3^m, 50 de rayon, on mène une corde dont la longueur est 1^m,75. On demande en centimètres carrés les aires des deux surfaces suivant lesquelles le cercle est ainsi partagé.

3. — Mener une tangente commune à deux circonférences. En appelant r et r' les rayons de ces circonférences, on donne $r = 0{,}03$; $r' = 0{,}05$. On demande quelle doit être la distance des centres pour que la tangente commune fasse un angle de 30° avec la ligne des centres. On examinera le cas de la tangente commune intérieure et de la tangente commune extérieure.

NANCY 1858.

1. — Partager graphiquement, à l'aide d'une circonférence concentrique, l'aire d'un cercle de rayon donné en deux parties qui doivent être entre elles comme les nombres 3 et 4. — En supposant le rayon de la circonférence donnée égal à $2^m,50$, calculer le rayon de la circonférence donnée à un centimètre près.

2. — Dans un cercle dont le diamètre est égal à 5^m, on a inscrit un rectangle dont l'un des côtés est égal à 4^m. Par les sommets de ce rectangle, on mène des tangentes qui forment un quadrilatère circonscrit au cercle; on demande la surface de ce quadrilatère, ainsi que ses angles.

NANCY 1860.

1. — Un mobile descend un plan incliné, en parcourant une distance égale à 35^m. La projection de ce chemin sur un plan horizontal est égale à 18^m. Le coefficient de frottement est 0,20. On demande le temps que mettra le mobile à parcourir la distance de 35^m.

2. — La surface d'une sphère est 32 mètres carrés; déterminer le volume d'un segment dont la base est déterminée par un plan sécant mené à une distance du centre égale à $0^m,50$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 123.

Solution par M. Cordeau, élève à l'École Lavoisier (Paris).

Dans le cas douteux du triangle, si l'on connaît A, a, b *et que l'on considère les deux solutions :*

1° *Les centres des deux cercles inscrits et des cercles ex-inscrits touchant le côté* c *sont sur une même circonférence ;*

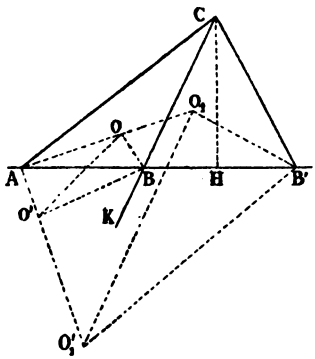
2° *Le produit des rayons des deux cercles inscrits et des deux cercles ex-inscrits touchant le côté* b *est égal au produit des surfaces des deux triangles ;*

3° *La somme des rayons des deux cercles inscrits et des cercles ex-inscrits touchant le côté* a *est égale au double de la hauteur commune aux deux triangles.*

(Tucker — *Educational Times.*)

1° Dans le quadrilatère inscriptible $O_1B'O'_1A$, l'angle $O_1B'A$ est égal à l'angle $O_1O'_1A$.

Mais les angles ABK, CBB' sont égaux comme opposés par le sommet et comme le triangle CBB' est isoscèle, l'angle ABK est égal à l'angle CBB' et par suite la moitié de cet angle ou ABO' est égal à $O_1B'A$ et par suite à $O_1O'_1A$.



Dans le quadrilatère inscriptible OAO'B l'angle AOO' est égal à l'angle ABO' et par suite à AO'_1O_1. Donc son supplément $O'OO_1$ est égal au supplément de $O'O'_1O_1$ et le quadrilatère $OO'O_1O'_1$ est inscriptible.

2° On a $r = \frac{S}{p}$, $R = p \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, dans le triangle ABC

et $r' = \frac{S'}{p'}$, $R' = p' \operatorname{tg} \frac{B'}{2}$, dans le triangle AB'C

mais $\frac{B}{2}$ est le complément de $\frac{B'}{2}$ donc $\operatorname{tg} \frac{R'}{2} = \operatorname{cotg} \frac{B}{2}$

et on a $$rr'RR' = SS'$$

3° On a les relations suivantes entre r, le rayon du cercle inscrit dans ABC, r' celui du cercle inscrit dans AB'C, R celui du cercle ex-inscrit au triangle ABC, le long de BC et R' celui du cercle ex-inscrit au triangle AB'C le long de B'C.

$$\frac{r}{p-a} = \frac{r'}{p'-a} = \frac{R}{p} = \frac{R'}{p'} = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

d'où $$\frac{r + r' + R + R'}{p - a + p' - a + p + p'} = \frac{p-a}{r}$$

ou $$\frac{r + r' + R + R'}{2(p-a) + 2p'} = \frac{\frac{S}{p}}{p-a} = \frac{2p(p-a)}{hc}$$

Mais dans le triangle ABC, $a^2 = b^2 + c^2 - 2c.\,AH = b^2 + c^2 - 2c\,(c + BH)$

d'où $(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2 = 2bc) + 2c\,(c + BH)$

d'où $(b + c)^2 - a^2 = 2c\ (b + c + \mathrm{BH})$

ou encore $4p\ (p - a) = 2c\ (b + c + \mathrm{BH})$

on a donc $\dfrac{r + r' + \mathrm{R} + \mathrm{R}'}{2\ (p - a) + 2p'} = \dfrac{h}{b + c + \mathrm{BH}}$

mais $2p'\ a + b + c + 2\mathrm{BH})$

d'où $2(p - a) + 2p' = 2(b + c + \mathrm{BH})$

Donc cette expression devient

$$\frac{r + r' + \mathrm{R} + \mathrm{R}'}{b + c + \mathrm{BH}} = \frac{2h}{b + c + \mathrm{BH}}$$

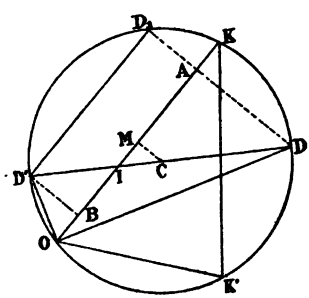
et enfin $r + r' + \mathrm{R} + \mathrm{R}' = 2h.$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Sou, de Libourne, et d'Ocagne, du collége Chaptal, qui nous a envoyé une bonne solution quoique un peu longue.

QUESTION 125.

Solution par M. Deslais, élève au Lycée du Mans.

On donne un cercle C, *un diamètre* DD′ *et une corde* KK *perpendiculaire à ce diamètre. On prend sur la circonférence un point* O, *que l'on joint aux extrémités* D, D′, K *et* K′ *du diamètre et de la corde donnés. Démontrer que la somme des projections* OD *et* OD′ *sur* OK *est égale à* OK *et la différence des projections égale à* OK′. (Duval.)



Les projections de OD et de OD′ sur OK sont OA etOB. On voit donc que pour démontrer la première partie du problème, il suffit de prouver que OB = AK.

Du centre C abaissons sur OK la perpendiculaire CM. Les triangles IAD, ICM étant semblables, on a

$$\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{ID}} = \frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IC}} = \frac{\mathrm{AI} - \mathrm{IM}}{\mathrm{DI} - \mathrm{IC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{CD}}$$

De même, à cause des triangles semblables IBD′ et ICM,

on a $\dfrac{\mathrm{IB}}{\mathrm{ID}'} = \dfrac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IC}} = \dfrac{\mathrm{IB} + \mathrm{IM}}{\mathrm{ID}' + \mathrm{IC}} = \dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{CD}'}.$

Donc $\frac{AM}{CD} = \frac{BM}{CD'}$ et comme $CD = CD'$

$AM = BM$ et par suite $AK = OB$.

La différence des projections est AB. Prolongeons DA en D_1. $AD_1 = BD'$ et par suite $D'D_1$ est égale et parallèle à AB. De plus arc OD' = arc KD_1, arc KD = arc $K'D$, par suite arc D_1D' = arc OK' et C_1D' = OK' ou $AB = OK'$.

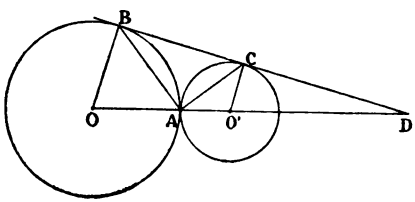
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Legay, de Tarbes; Chavanon, de Lyon; Lacroix, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne; d'Ocagne, collége Chaptal; Vermand, de Saint-Quentin; Roulleau, Gélinet, d'Orléans; Longueville, de Charleville; Bucheron, de Moulins.

QUESTION 126.

Solution par M. Bompard, Collége Stanislas.

Etant données deux circonférences tangentes extérieurement au point A, *mener par ce point deux cordes dont les segments* AB, AC *situés respectivement dans les deux circonférences soient rectangulaires et égaux entre eux.* (Hallé.)

On sait que si l'on mène deux droites rectangulaires par le point de contact de deux circonférences tangentes, les rayons aboutissant au point où chacune coupe respectivement chaque circonférence, sont parallèles, et par suite la droite BC passe par le centre de similitude externe. BA étant égal à AC, l'angle ABC vaut 45°. Soit donc D le centre de similitude externe de ces deux circonférences. Sur AD décrivons un segment capable de 45° qui coupe la circonférence O en un point B. Par A menons la perpendiculaire AB. Les droites AB et AC seront les droites demandées.



Nota. — Ont résolu la même question : MM. Ailleret, de Versailles; d'Ocagne, collége Chaptal; Chavanon, de Lyon; Huet, d'Orléans; Tessier; d'Angers; Combebiac, de Montauban; Vermand, de Saint-Quentin; Genin, de Charleville; Raspilaire, de Saint-Étienne; Plomet, Collége Stanislas,

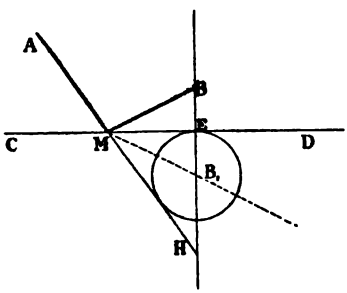
Paulne, de Passy; Schmitz, de la Rochelle; Hoc, de Longwy; Giuilq, lycée Fontanes; Monceau, d'Orléans; Cordeau, École Lavoisier; Gelinet, d'Orléans; Dupuis, de Grenoble; Perrot, d'Angers; Legay, de Tarbes.

M. Vigneau, du lycée d'Angoulême, nous a adressé également une bonne solution de cette question généralisée.

QUESTION 127.

Solution par M. Raspilaire, cours des mineurs, Saint-Etienne.

Étant donnés deux points A *et* B *situés d'un même côté de la droite* CD, *trouver sur cette droite un point* M *tel qu'en le joignant aux deux points* A *et* B, *l'angle* AMC *soit le double de* BMD.



Soit M le point cherché sur la droite, tel que ACM = 2 BMD. Si l'on mène la perpendiculaire indéfinie BE et la bissectrice de l'angle DMH, le point B, où ces deux droites se coupent, sera le centre d'un cercle tangent à CD et à AM prolongée d'où l'on peut déduire facilement la construction.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Genin, de Charleville; Objois, de Moulins; Tissier, d'Angoulême; Ailleret, de Versailles; Glin, lycée Corneille à Rouen; Perot, à Angers; Roulleau, Huet et Gelinet à Orléans; Cordeau et Joly, école Lavoisier; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier; Hoc, à Longwy; Corbeau, à Saint-Quentin; Chesne, à La Flèche; Bucheron, à Moulins; Bompard, collége Stanislas.

QUESTIONS PROPOSÉES.

153. — Étant donné un cercle O, et un point extérieur P, mener par le point P une sécante PAB, de façon que la partie intérieure AB soit vue du centre O sous un angle égal à l'angle que fait la sécante PAB avec le diamètre PO.

(*De Longchamps.*)

154. — On donne un cercle O et une droite DD′; soit AC une tangente quelconque de ce cercle, tangente qui rencontre en A la droite donnée DD′. On mène les bissectrices des angles en A, et on projette le centre du cercle sur ces bissectrices; on demande : 1° le lieu de projection du centre sur les bissectrices; 2° le lieu du point B où la tangente variable AC rencontre la projetante du point O sur les bissectrices. (*De Longchamps.*)

155. — Étant donné un parallélogramme ABCD, on prolonge AB d'une longueur BB′, et AD d'une longueur égale DD′; on construit avec AD′ et AB′ un parallélogramme; soit C′ le quatrième sommet de ce parallélogramme; démontrer que les droites B′D, BD′ se coupent sur la droite CC′.

(*De Longchamps.*)

156. — Sur deux côtés consécutifs d'un carré ABCD, on décrit des circonférences ayant pour diamètre ces côtés, et l'on mène des tangentes MQ, NQ parallèles aux côtés du carré. Démontrer que le rayon du cercle O, tangent aux deux premiers et à MQ, NQ, est égal au double du côté du carré, diminué de deux fois le côté du triangle équilatéral inscrit dans l'un des cercles précédents. (*Perrin.*)

157. — Une droite de longueur et de direction constantes, appuie ses extrémités sur deux sphères données. On demande la courbe décrite par chaque extrémité sur la sphère correspondante. (*Amigues.*)

158. — Soit O le centre d'un cercle, ABC un triangle circonscrit, A′, B′, C′ les points de contact des côtés BC, CA, AB; si on désigne par R le rayon du cercle, par S et S′ les aires des triangles ABC, A′B′C′, on a

$$4S = R^4 \frac{S'^2}{OA'B' \,.\, OA'C' \,.\, OB'C'}$$

(*Amigues.*)

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 4198-9.

THÉORIE DE L'INCOMMENSURABILITÉ

RÉDIGÉE D'APRÈS LES NOTES PRISES AU COURS DE M. SONGAYLO
Professeur au Collége Chaptal, examinateur d'admission
à l'École centrale

Par Maurice **d'Ocagne**, élève au Collége Chaptal, bachelier ès sciences.

(*Suite;* voir page 65.)

IV.—Application à la racine carrée.—Théorème. — *Lorsqu'un nombre entier* A *n'est pas carré parfait d'un nombre entier, sa racine est incommensurable.* En effet, si cette racine n'était pas incommensurable, elle serait égale à une fraction $\frac{a}{b}$ qu'on pourrait toujours supposer irréductible et on aurait $A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Or, b étant premier avec a, b^2 l'est aussi avec a^2. Par suite $\frac{a^2}{b^2}$ ne peut donner un nombre entier et l'égalité précédente est impossible.

Il résulte de là que la recherche des racines conduira le plus souvent à des nombres incommensurables.

Comment donc pourra-t-on définir la racine dans ce cas? Pour établir cette définition, nous allons faire sur l'exemple actuel des raisonnements analogues à ceux que nous venons d'exposer d'une manière générale.

Extraire la racine carrée de A à $\frac{1}{n}$ près, c'est chercher le plus grand multiple de $\frac{1}{n}$ dont le carré soit contenu dans A.

Supposons alors qu'on ait extrait la racine carrée de A avec les approximations

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \ldots \frac{1}{n^p}$$

et soient les racines approchées par défaut, et par excès correspondantes :

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m'}{n^2}, \quad \ldots \quad \frac{\mu}{n^p}, \quad \frac{\mu'}{n^{p+1}}$$

$$\frac{m+1}{n}, \frac{m'+1}{n^2}, \ldots \frac{\mu+1}{n^p}, \frac{\mu'+1}{n^{p+1}}$$

Nous allons faire voir que l'approximation ainsi définie entraîne la croissance ou le stationnement de la racine.

En effet, on a, par définition,

$$\left(\frac{\mu}{n^p}\right)^2 < A < \left(\frac{\mu+1}{n^p}\right)^2$$

et

$$\left(\frac{\mu'}{n^{p+1}}\right)^2 < A < \left(\frac{\mu'+1}{n^{p+1}}\right)^2$$

ou

$$\mu^2 < An^{2p} < (\mu+1)^2 \qquad (1)$$

$$\mu'^2 < An^{2p+2} < (\mu'+1)^2 \qquad (2)$$

Multiplions l'expression (1) par n^2, nous avons

$$\mu^2 n^2 < An^{2p+2} < (\mu+1)^2 n^2 \qquad (3)$$

L'inégalité (2) exprime que μ' est la racine à une unité près par défaut de An^{2p+2} ; μ' est donc le plus grand nombre entier dont le carré soit contenu dans ce nombre.

μn est un nombre entier dont le carré est contenu dans An^{2p+2}, mais ce n'est pas nécessairement le plus grand, car dans (3) la différence entre les racines des membres extrêmes est égale à n, quantité généralement plus grande que 1.

Il résulte donc des inégalités (2) et (3) que l'on a

$$\mu' \geq \mu n$$

ou divisant de part et d'autre part n^{p+1}

$$\frac{\mu'}{n^{p+1}} \geq \frac{\mu}{n^p} \qquad (4)$$

En comparant de même les derniers membres, on voit que $\mu'+1$ est le plus petit nombre entier dont le carré soit supérieur au nombre intermédiaire.

On a donc, comme précédemment,

$$\mu'+1 \leq (\mu+1)^n$$

ou

$$\frac{\mu'+1}{n^{p+1}} \leq \frac{\mu+1}{n^p} \qquad (5)$$

L'inégalité (4) prouve que les racines approchées par

défaut vont en croissant en pouvant cependant rester stationnaires par intervalles, et comme de plus elles sont toutes inférieures à une racine par excès quelconque, elles admettent une limite. De même, les racines par excès qui, d'après l'inégalité (5), décroissent ou stationnent, tout en restant supérieures à une racine par défaut quelconque, admettent une limite.

De plus, la différence $\frac{1}{n^p}$ entre une racine par défaut et la racine par excès correspondante pouvant devenir plus petite que toute quantité assignable, les deux limites sont les mêmes.

C'est cette limite commune que l'on appelle racine du nombre A.

Dans ce qui précède, nous avons pris pour dénominateurs des fractions exprimant les diverses approximations, les puissances successives d'un certain nombre n; faisons voir que pour obtenir la limite cherchée, il suffit de faire croître le dénominateur de la fraction considérée d'une manière quelconque.

Pour cela prenons la racine carrée à une approximation $\frac{1}{q}$ du nombre A. Soient $\frac{a}{q}$ et $\frac{a+1}{q}$ les racines correspondantes par défaut et par excès,

on a
$$\left(\frac{a}{q}\right)^2 < A < \left(\frac{a+1}{q}\right)^2$$

ou multipliant par n^{2p}

$$\frac{a^2n^{2p}}{q^2} < An^{2p} < \frac{(a+1)^2n^{2p}}{q^2} \qquad (6)$$

D'autre part, nous avons obtenu plus haut

$$\mu^2 < An^{2p} < (\mu+1)^2 \qquad (7)$$

L'expression (6) nous montre que le carré de $\frac{an^p}{q}$ est contenu dans An^{2p}, et l'expression (7) que An^{2p} est inférieur au carré de $\mu + 1$. Par suite,

$$\frac{an^p}{q} < \mu + 1 \quad \text{ou} \quad \frac{a}{q} < \frac{\mu+1}{n^p} \qquad (8)$$

En comparant de même μ à $\frac{(a+1)n^p}{q}$ on a l'inégalité

$$\frac{(a+1)n^p}{q} > \mu \quad \text{ou} \quad \frac{a+1}{q} > \frac{\mu}{n^p} \qquad (9)$$

Nous pouvons, laissant q fixe, faire varier p; alors les fractions $\frac{\mu+1}{n^p}$ et $\frac{\mu}{n^p}$ tendent, d'après la première partie de la démonstration, vers une même limite L, racine de A.

On a donc, d'après (8) et (9), en remarquant que lorsqu'on passe à la limite les inégalités peuvent se changer en égalités, $\frac{a}{q} \leq L$

et $$\frac{a+1}{q} \geq L \text{ ou } \frac{a}{q} \geq L - \frac{1}{q}$$

Par suite, $$L \geq \frac{a}{q} \geq L - \frac{1}{q}$$

Si maintenant on fait varier q d'une manière quelconque, mais de façon à le rendre plus grand que toute quantité donnée aussi grande qu'on voudra, $\frac{1}{q}$ tendra vers o et, par conséquent, à la limite, on aura

$$\lim \frac{a}{q} = L$$

C'est là ce que nous nous proposions d'établir.

On pourrait répéter les mêmes raisonnements que ceux qui précèdent pour une racine quelconque.

V. — **Calcul des nombres incommensurables.** — Pour l'*addition* et la *soustraction* aucune difficulté ne se présente. On prend des valeurs aussi approchées qu'on veut des nombres incommensurables à ajouter ou à retrancher, et on opère sur ces valeurs suivant les règles connues. On obtient ainsi une valeur approchée de la somme ou de la différence.

Mais, dans la multiplication, on cherche un nombre qui se compose avec le multiplicande comme le multiplicateur avec l'unité. Dans le cas qui nous occupe, il faudrait chercher un nombre qui se composât avec un nombre incommensurable comme un autre nombre incommensurable

avec l'unité. Or, comme on ne peut composer un nombre incommensurable avec l'unité, la définition se trouve en défaut.

Il faut donc définir la multiplication des nombres incommensurables, et leur division, opération inverse de la première.

Multiplication. — Soient A et B les nombres dont il faut faire la multiplication; considérons les valeurs approchées, a et b par défaut, a_1 et b_1 par excès. Nous allons démontrer que les produits ab et a_1b_1 sont une limite commune, lorsque a, a_1, b, b_1, tendent vers leurs limites.

1° Ils ont une limite. En effet, le produit ab va constamment en croissant; d'ailleurs, il reste toujours inférieur à a_1b_1, par suite, d'après le théorème I sur les limites, il a une limite.

De même a_1b_1, décroissant constamment en restant supérieur à ab, admet une limite.

2° Ces limites sont les mêmes.

Posons $a_1 = a + \alpha \quad b_1 = b + \beta$

Nous avons alors

$$a_1b_1 - ab = (a + \alpha)(b + \beta) - ab$$
$$= \alpha b + a\beta + \alpha\beta$$

Lorsqu'on fait tendre a, a_1, b, b_1, vers leurs limites, nous savons, d'après ce qui a été démontré précédemment, que a et a_1 tendent vers la même limite; de même pour b et b_1; par suite α et β tendent vers o, et, à la limite la différence $a_1b_1 - ab$ devient nulle; les deux produits ont donc bien une limite commune. C'est cette limite qui constitue le produit des nombres incommensurables considérés.

Corollaire. — Dans un produit de facteurs incommensurables on peut intervertir l'ordre des facteurs.

Considérons, en effet, les valeurs approchées a, b, c des facteurs incommensurables A, B, C; a, b, c, étant des nombres finis, on a $abc = cab$

et si on prend d'autres valeurs de plus en plus approchées des limites, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ... on a encore

$$a_1\ b_1\ c_1 = c_1\ a_1\ b_1$$

$$a_2\ b_2\ c_2 = c_2\ a_2\ b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

Lorsqu'on passe à la limite on peut admettre que les deux produits constamment égaux, le sont encore, et comme les produits *abc, cba* tendent respectivement, d'après ce qui vient d'être dit, vers ABC et CBA, on a, à la limite,

$$ABC = CBA$$

Exemple : $\pi\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \pi$.

Division. — Soient D le dividende, d le diviseur, tous deux incommensurables. Considérons les valeurs approchées, Δ et δ par excès, Δ_1 et δ_1 par défaut.

On a : $\Delta > D > \Delta_1$

$\delta > d > \delta_1$

Supposons, d'autre part, que $\Delta = \delta_1 q$ (1)

et $\Delta_1 = \delta q_1$ (2)

Δ étant plus grand que Δ_1, et δ_1 plus petit que δ, ces deux raisons s'ajoutent pour donner $q > q_1$.

Faisons tendre Δ, Δ_1, δ, δ_1 vers leurs limites. Dans l'égalité (1) Δ décroît, δ_1 croît, donc q décroît ; de même, dans (2) Δ_1 croît, δ décroît, donc q_1 croît. Il en résulte que q croît constamment, et comme il reste toujours inférieur à q_1, il admet une limite ; de même q_1 décroît constamment en restant supérieur à q, il a donc aussi une limite.

Ces limites sont égales. Pour le démontrer posons

$$\Delta_1 = \Delta - \alpha \qquad \delta_1 = \delta - \beta$$

Remplaçant Δ_1 et δ_1 par ces valeurs dans (1) et (2), il vient

$$\Delta = (\delta - \beta)\ q$$
$$\Delta - \alpha = \delta q_1$$

Retranchant ces deux dernières inégalités membre à membre, il vient $\alpha = \delta\,(q - q_1) - \beta q$

ou $\delta\,(q - q_1) = \alpha + \beta q$

Lorsqu'on passe à la limite, α et β tendant vers o, le second membre de l'égalité tend vers o et comme δ n'est pas nul $\lim.\ q - q_1 = o$

Ainsi à la limite, $q = q_1$ ou $\dfrac{\Delta}{\delta_1} = \dfrac{\Delta_1}{\delta}$

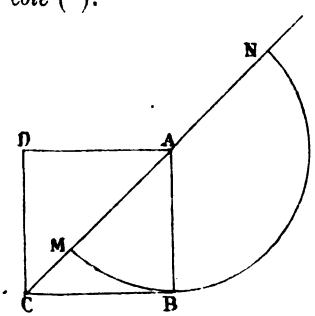
Le quotient cherché sera, par suite, la limite de $\frac{\Delta}{\delta_1}$ ou de $\frac{\Delta_1}{\delta}$.

Des grandeurs incommensurables en géométrie. — Disons enfin un mot de l'incommensurabilité en géométrie.

Les propriétés métriques des figures conduisent parfois à la considération de grandeurs incommensurables ; c'est-à-dire qu'il peut se faire que certains éléments d'une figure n'admettent entre eux aucune commune mesure.

Nous citerons de ces grandeurs incommensurables deux exemples bien connus : la circonférence de cercle et le diamètre ; la diagonale du carré et le côté.

Pour faire voir comment on peut déterminer géométriquement l'incommensurabilité de deux grandeurs, nous allons démontrer, *à priori*, par la seule comparaison de ces deux lignes, que *la diagonale du carré est incommensurable avec le côté* (*).



Menons la diagonale AC du carré ABCD et prolongeons-la au delà du point A. De A comme centre, avec AB pour rayon, décrivons une demi-circonférence qui détermine sur AC et son prolongement les points M et N.

Pour démontrer que AC est incommensurable avec AB, nous allons essayer de mesurer la première de ces lignes à l'aide de la seconde. Formons donc le rapport $\frac{AC}{AB}$.

Nous avons $AC = AM + MC = AB + MC$

Donc $$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{MC}{AB} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}} \qquad (1)$$

(*) Nous tenons la démonstration suivante de M. Hauser, professeur de mathématiques spéciales au collége Chaptal. — M. O.

Nous sommes donc amenés à déterminer le rapport $\frac{AB}{MC}$

Or $$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 = CM \times CN,$$

d'où $$\frac{AB}{MC} = \frac{CN}{AB}$$

Mais $$CN = NA + AM + MC$$
$$= 2AB + MC$$

Donc

$$\frac{AB}{MC} = \frac{2AB + MC}{AB} = 2 + \frac{MC}{AC} = 2 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}} \quad (2)$$

Par suite, si nous portons cette valeur dans (1) nous avons

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{MC}}}$$

Nous sommes donc de nouveau amenés à évaluer $\frac{AB}{MC}$. Or nous connaissons cette valeur; elle nous est fournie par l'égalité (2) et nous introduirons ainsi encore une fois $\frac{AB}{MC}$, qu'il faudra encore remplacer par sa valeur, etc. Nous pourrons ainsi pousser l'opération indéfiniment sans jamais arriver à un résultat fini, car nous retomberons toujours sur le rapport $\frac{AB}{MC}$. Ainsi le rapport $\frac{AC}{AB}$ se présente sous la forme

$$\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdots}}}$$

et si loin que l'on pousse l'opération, on ne pourra arriver à évaluer exactement ce rapport; il résulte de là que les longueurs AC et AB sont incommensurables entre elles, ce que nous proposions de démontrer.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 70.)

Corps polis. Loi de la réflexion. — Les corps polis sont ceux qui renvoient spéculairement la lumière, c'est-à-dire dans une direction donnée. On sait que le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans un même plan contenant la normale à la surface réfléchissante et que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Intensité du rayon réfléchi. — L'intensité du rayon réfléchi varie : 1° avec la nature de la surface réfléchissante ; 2° avec l'angle de réflexion.

Cette dernière variation est assez considérable pour certaines substances. Pour d'autres (et les surfaces métalliques sont de ce cas), l'intensité du rayon réfléchi varie très-peu avec l'incidence. Cette intensité est toujours plus grande sous l'incidence rasante que sous l'incidence normale.

Nous admettrons que les corps polis que nous allons étudier sont des métaux et que l'intensité du rayon réfléchi est indépendante de l'incidence. Cette intensité variera donc seulement avec celle de la source lumineuse.

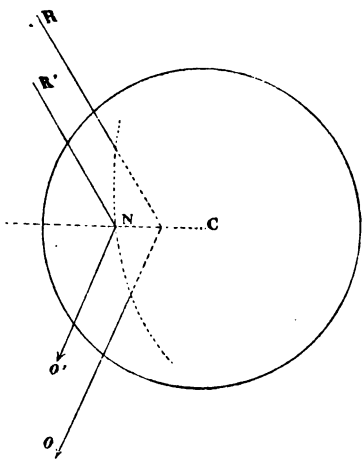
Aspect d'un plan parfaitement poli, éclairé par des rayons parallèles, dirigés dans une seule direction et regardé à l'aide de rayons visuels parallèles, c'est-à-dire l'œil étant à l'infini. — Les rayons se réfléchissent d'après la loi connue. Si les rayons visuels sont parallèles aux rayons réfléchis, tous les points du plan paraissent lumineux, sinon ils seront obscurs et le plan ne semblera pas exister.

Aspect d'un plan poli, éclairé par des rayons parallèles venant dans toutes les directions, l'œil

étant à l'infini. — C'est le cas de la lumière solaire jointe aux lumières indirectes émanant de l'atmosphère. L'œil ne recevra des rayons directs ou indirects que ceux qui, après la réflexion, auront pris la direction du rayon visuel.

Si ce sont les rayons de reflets les plus intenses qui sont renvoyés à l'œil, le plan paraîtra très-lumineux et d'un éclat uniforme, et inversement.

Aspect d'une sphère polie éclairée par des rayons lumineux parallèles, dirigés dans une direction unique, l'œil étant à l'infini. — On mène le rayon lumineux central RC, le rayon visuel CO, la bissectrice de leur angle CN, au point de sortie de cette bissectrice N, un rayon incident R'N' sera réfléchi suivant NO', c'est-à-dire dans la direction de l'œil. Le point N sera le point brillant de la sphère polie.



Ce point seul sera brillant. Tous les autres seront obscurs et l'existence de la sphère ne se révélera que par ce point brillant.

Aspect d'une sphère polie, éclairée par des rayons parallèles venant de toutes les directions, l'œil étant à l'infini. — C'est le cas d'une sphère éclairée par la lumière solaire directe et par toutes les lumières indirectes.

Chaque direction de rayon donnera son point brillant. Comme elles sont en nombre infini, il y aura de ces points brillants sur toute la surface de la sphère ; seulement ils n'auront pas le même éclat. Pour avoir des lignes d'égales teintes, si nous admettons, ce qui est faux, que la variation

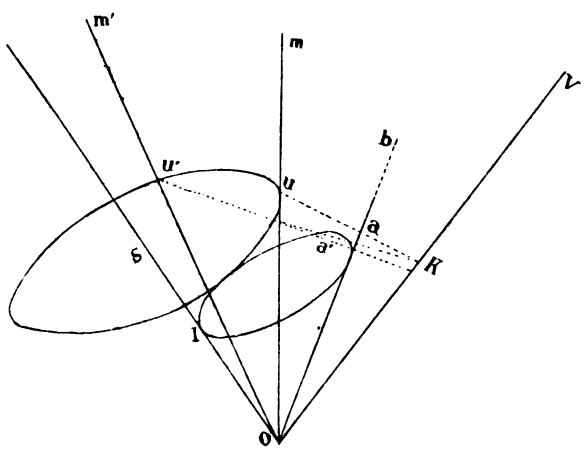
de l'angle d'incidence ne modifie pas l'éclat des rayons réfléchis, il faudra :

1° Classer les rayons indirects d'après leur différence d'éclat, ce qui se ferait à l'aide d'une courbe représentative analogue à celle que nous avons étudiée plus haut ;

2° Grouper les rayons d'égale intensité. Ils formeront une série de cônes de révolution ayant tous pour axe le rayon lumineux direct ;

3° Chercher sur la sphère le lieu des points brillants des rayons d'égale intensité. Pour une série de rayons d'égale intensité les points brillants auront le même éclat et leur lieu géométrique sera une ligne d'égale teinte.

Lignes d'égales teintes sur une sphère parfaitement polie. — Soit OS le rayon direct ; *mu*, *m'u'*..... une série de rayons indirects d'égale intensité et disposés suivant les génératrices d'un cône, dont l'axe SO est le rayon central direct.



Les points d'incidence *u*,*u'* se trouvent sur un cercle de la sphère, puisque les rayons d'égale intensité forment un cône de révolution.

Soit OV le rayon visuel, K son point de sortie sur la sphère.

Cherchons le point brillant de la direction *mu*. Menons la bissectrice O*a'* de l'angle *u*OV.

Le triangle *u*OK est isoscèle, puisque O*u* et OK sont deux rayons de la sphère. Le point *a* est le milieu de la droite K*u*.

Si l'on prolonge O*a* jusqu'en *b'* rencontre avec la sphère, *b'* sera le point brillant de la direction *mu*. Mais le lieu des points *a'* est un cercle homothétique du cercle *uu'*, par rapport au point K. Le plan de ce cercle est parallèle au plan du cercle *uu'*, et situé à une distance du point K, sortie du rayon visuel, qui est moitié de celle du premier.

Le lieu des points brillants *b'* sera donc dans l'intersection de la sphère et du cône ayant le cercle *aa'* pour directrice et le centre O pour sommet.

Épure. — Par une rotation, le rayon lumineux est supposé rendu parallèle au plan horizontal et projeté à l'angle φ sur ce dernier.

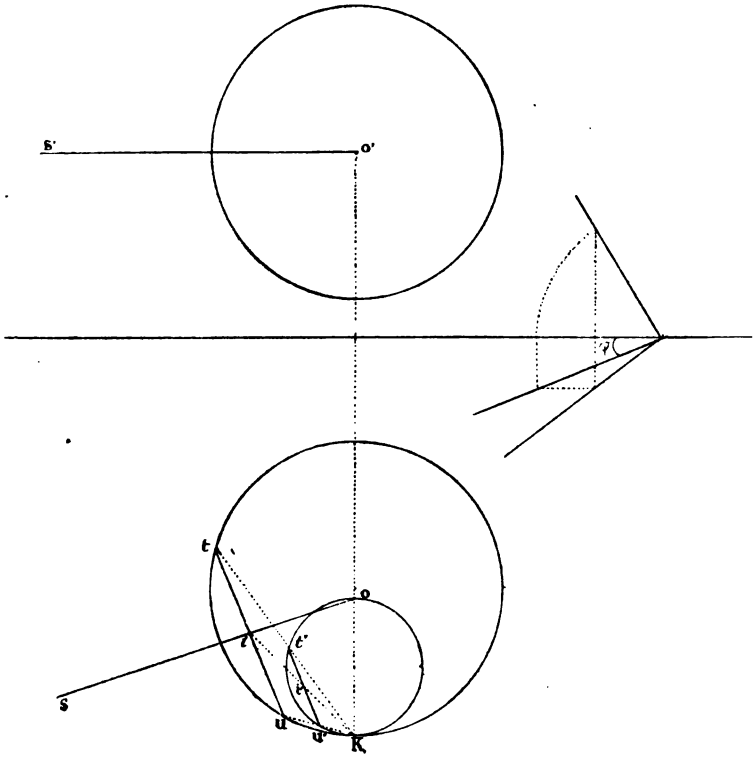
Soit OS, O'S' le rayon direct. Prenons une série de rayons indirects d'égal éclat; ils formeront un cône ayant OS pour axe. La ligne des points d'incidence sera le cercle *ut*, projeté horizontalement en ligne droite et perpendiculairement au rayon direct. Ce cercle peut être considéré comme l'intersection de la sphère et du plan vertical qui aurait *ut* pour trace horizontale.

K est le point de sortie du rayon visuel.

Joignons *t*K, *i*K, *u*K, et prenons le milieu de ces lignes; nous aurons en *t' i' u'*, le cercle homothétique du premier, qu'il faut prendre pour directrice d'un cône ayant son sommet au point O.

Si nous décrivons la sphère ayant OK pour diamètre, ce cercle *u' t'* peut être considéré comme l'intersection de cette sphère par un plan parallèle au premier.

Nous aurons donc les lignes de teinte en prenant la petite sphère OK; la coupant par des plans perpendiculaires au rayon lumineux: prenant les cercles ainsi formés pour bases de cônes ayant leurs sommets au centre de la sphère et cherchant les intersections de ces cônes avec la sphère primitive.



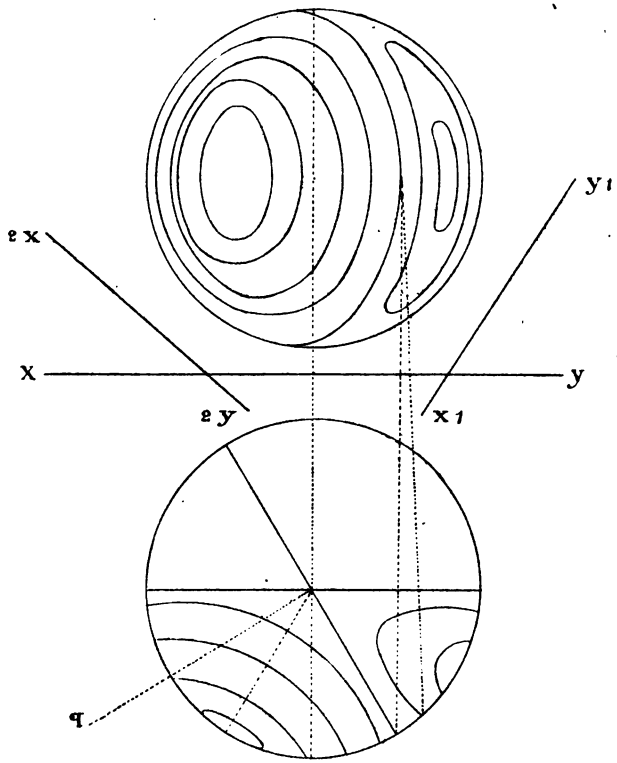
Les courbes en projection horizontale seront des coniques, puisque ce plan de projection est parallèle à un plan diamétral commun aux deux surfaces.

Le calcul montre que toutes les lignes d'égales teintes dans cette hypothèse se projetteront horizontalement suivant des hyperboles ayant mêmes asymptotes.

La connaissance d'un point seulement suffira pour les tracer par points. On en déduira ensuite les courbes en projection verticale.

L'épure en projection verticale une fois faite en prenant x_1y_1 pour ligne de terre, la sphère se présentera dans la position ordinaire d'une élévation; en prenant x_2y_2 on la verra en plan.

On ne s'étendra pas davantage sur l'étude d'une sphère polie placée dans les conditions précédentes, conditions



tout à fait en dehors de celles qui se présentent ordinairement.

Nous avons admis en effet :

1° Que l'incidence ne modifiait pas l'éclat du rayon réfléchi (ce qui n'est pas exact) ;

2° Que la sphère était isolée au milieu de l'atmosphère et placée très-loin de la terre ;

3° Que l'éclat des diverses parties du ciel était conforme à la loi figurée par la courbe représentative.

Or les nuages modifieront cet éclat, et les objets qui

entourent le corps poli viendront s'y réfléchir et former image.

Lorsque l'on voudra, dans un dessin, rendre l'aspect d'un corps parfaitement poli, on devra figurer à sa surface les images des objets environnants. La géométrie donnerait le moyen de trouver ces images brillantes; mais les épures seraient fort compliquées, et il serait oiseux pour un cas si rare dans la pratique de faire une pareille étude. Il sera préférable, si le cas se présente, d'agir comme les peintres, de faire poser le modèle et de le copier. On remarquera seulement que la ligne d'ombre propre est encore dans ce cas une ligne d'égale teinte.

Corps mi-polis. — Les corps mi-polis participent, comme propriétés, des corps polis et des corps dépolis.

Les lumières intenses s'y réfléchissent plus qu'elles ne s'y diffusent, et les lumières faibles font le contraire.

Une lumière intense donnera donc lieu sur leur surface à une image brillante, comme s'ils étaient polis. Nous chercherons ce point brillant comme nous l'avons fait ci-dessus, c'est-à-dire pour la bissectrice de l'angle du rayon lumineux central et du rayon visuel central.

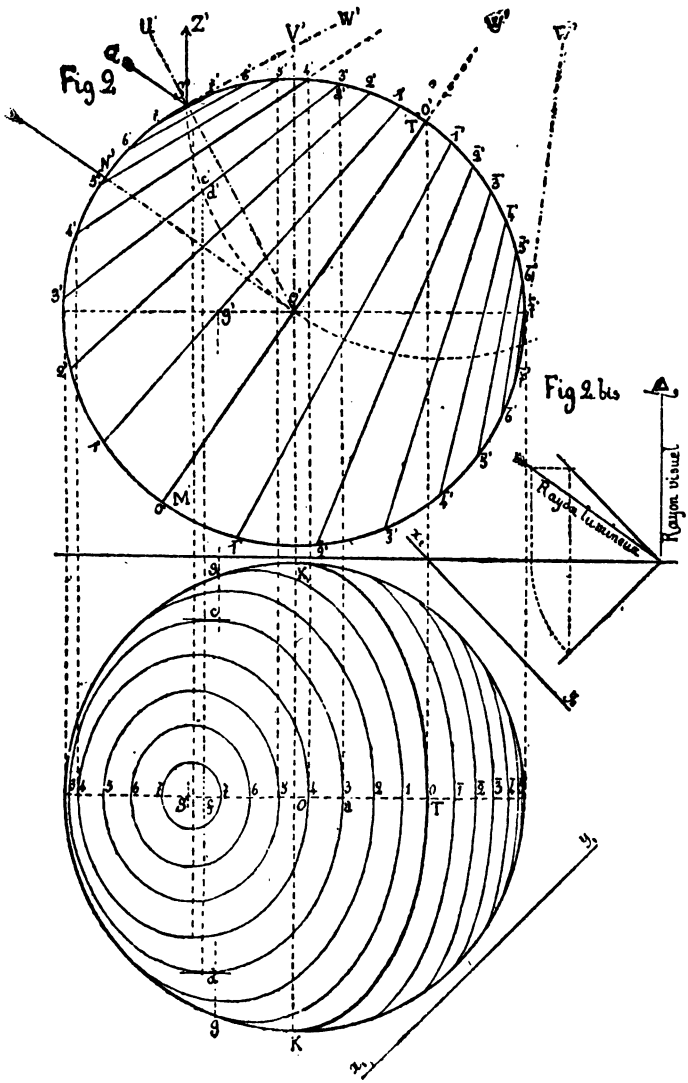
Nous tracerons l'ombre propre comme si la surface était dépolie et nous adopterons comme lignes de teintes une série de courbes passant graduellement du point brillant à la ligne d'ombre propre.

Épure. — Nous avons adopté la construction conventionnelle suivante, s'appliquant à un observateur qui regarderait la projection horizontale. OO′ est le centre de la sphère. Le rayon lumineux est rendu par une rotation parallèle au plan vertical et projeté à l'angle φ sur ce plan.

Le point brillant situé sur le méridien de front.

Le rayon visuel est perpendiculaire au plan horizontal. On a mené le rayon lumineux N′O′ qui passerait par le centre. La bissectrice O′S′ a donné en S′S le point brillant.

L'ombre propre est déterminée par le grand cercle M′T′ perpendiculaire au rayon lumineux.



Pour simplifier, on a pris pour lignes de teintes des courbes planes, mais c'est par pure convention.

On a mené le plan tangent S'W' au point brillant et l'on a pris l'intersection projetée tout entière en W' de ce plan tangent et du plan d'ombre propre.

Les lignes de teinte seront les sections faites par des plans non plus parallèles mais passant tous par la ligne W' perpendiculaire au plan vertical.

Comme pour la sphère dépolie, on a pris sept plans divisant l'hémisphère éclairé en 8 zones.

A cet effet, l'arc T'S' a été partagé en 8 parties égales. Ces lignes ont été affectées de nombres positifs. On a prolongé le même tracé dans l'hémisphère ombré et les lignes ont été affectées de nombres négatifs.

On remarquera que dans une sphère polie ou mi-polie le point brillant est beaucoup plus éloigné du contour apparent que dans une sphère dépolie. Le contour apparent est plus sombre sur la sphère mi-polie que sur l'autre.

Échelles de teintes. — Ayant tracé les lignes de teintes sur une sphère polie ou mi-polie, il sera facile d'en déduire les lignes de teintes sur des cylindres ou sur des cônes de révolution placés dans des positions quelconques.

Il suffira de circonscrire à la sphère le cylindre ou le cône, de déterminer la ligne de contact, de prendre les points de rencontre de cette ligne avec les courbes de teintes et de faire passer par ces points les génératrices des cônes ou des cylindres dont on veut faire le lavis.

Les échelles de teintes que nous adoptons sont au nombre de quinze. Les unes s'appliquent aux corps mi-polis qui sont ceux que l'on rencontre le plus souvent dans le dessin de machines; les autres aux corps dépolis (pierres, bois...), que l'on rencontre en architecture *.

---

* Voir ces échelles dans la *Théorie des ombres et du lavis, leçons professées à l'école Turgot*, par J. Pillet. Librairie Delagrave.

FORMULE D'APPROXIMATION

POUR LA RACINE CARRÉE.

Par M. F. **Bernier**.

La formule dont il va être question est un cas particulier d'une autre formule générale et très-ancienne, puisqu'on la trouve dans les premières *Tables de Vega* publiées à Vienne en 1783. Mais je ne crois pas qu'on en ait discuté le degré d'approximation. On va voir que cela est facile pour le cas de la racine carrée.

Soit $N = a^2 + x$ un nombre dont on connaît une valeur approchée de la racine. Posons $\sqrt{a^2 + x} = a + z$; élevons au carré ; l'on aura $x = 2az + z^2 = z\,(2a + z)$

$$z = \frac{x}{2a + z}$$

En négligeant z au dénominateur j'aurai $z = \frac{x}{2a}$, ce qui est la formule d'approximation connue en arithmétique. Si je substitue cette valeur approchée à la place de z, au dénominateur, j'obtiendrai pour seconde approximation,

$$z = \frac{x}{2a + \frac{x}{2a}} = \frac{2ax}{4a^2 + x}$$

Soit e l'erreur de cette expression de z, en sorte que

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{2ax}{4a^2 + x} + e \qquad (1)$$

on tire successivement de cette équation,

$$e = \sqrt{a^2 + x} - \frac{4a^3 + 3ax}{4a^2 + x}$$

$$= \frac{(4a^2 + x)\sqrt{a^2 + x} - (4a^3 + 3ax)}{4a^2 + x}$$

$$= \frac{(4a^2 + x)^2\,(a^2 + x) - (4a^3 + 3ax)^2}{(4a^2 + x)\left\{(4a^2 + x)\sqrt{a^2 + x} + (4a^3 + 3ax)\right\}}$$

Les calculs faits, le numérateur se réduit à x^3 ; l'on peut reconnaître dans l'accolade du dénominateur, le cube de $\sqrt{a^2 + x} + a$.

Ainsi : $e = \dfrac{x^3}{(4a^2 + x)\,(\sqrt{a^2 + x} + a)^3}$.

moyennant quoi l'équation (1) devient une identité. Les trois termes de son second membre seront désignés ainsi : la racine approchée, la correction et l'erreur.

Afin d'arriver à une limite supérieure de e plus simple que son expression exacte, je supposerai, pour préciser, que a est un entier au moins égal à 10 et approché à une demi-unité près.

1er *cas :* La racine est approchée par défaut. Alors x est positif. En le négligeant au dénominateur, dans l'expression de e, j'augmente cette valeur et j'ai évidemment

$$e < \frac{x^3}{32a^5}$$

2e *cas :* La racine est approchée par excès. Faisant abstraction du signe de x et de celui de e, l'on a dans ce cas

$$e = \frac{x^3}{(4a^2 - x)\,(\sqrt{a^2 - x} + a)^3},$$

ou bien sous une autre forme

$$e = \frac{x^3}{a^5\left(4 - \dfrac{x}{a^2}\right)\left(\sqrt{1 - \dfrac{x}{a^2}} + 1\right)^3}$$

A la place du rapport variable $\dfrac{x}{a^2}$ je puis mettre, une fois pour toutes, sa plus grande valeur possible, correspondant à la plus grande de x par rapport à a, c. à d. à $a - \dfrac{1}{4}$ et à la plus petite de a, c. à d. 10. En définitive, si je remplace $\dfrac{x}{a^2}$ par $\dfrac{10 - \dfrac{1}{4}}{100} = \dfrac{39}{400}$, les deux derniers facteurs du dénominateur deviendront constants et

aussi petits que possible. J'aurai alors, tous calculs faits,

$$e < \frac{x^3}{28,9a^5}$$

En comparant cette limite à celle relative à la racine approchée par défaut, on voit qu'on peut se borner à la seconde, et même écrire plus simplement, quel que soit le nombre des chiffres de a

$$e < \frac{x^3}{28a^5}$$

Je mets cette inégalité sous la forme suivante

$$e < \frac{1}{3,5a^2}\left(\frac{x}{2a}\right)^3$$

et je remarque que $\frac{x}{2a}$ est, à peu près, la correction même de la racine approchée ayant, dans nos conditions, 0,5 pour plus grande valeur. Ainsi, quel que soit a, on aura

$$e < \frac{0,5^3}{3,5\ a^2} = \frac{1}{28\ a^2} = \frac{0,036}{a^2}$$

Soit n le nombre des chiffres de a supposé entier; en sorte que $a > 10^{n-1}$

et par suite $e < \frac{0,036}{10^{2n-2}} = \frac{3,6}{10^{2n}}$,

ou plus simplement, et pour tous les cas:

$$e < \frac{4}{10^{2n}}$$

Donc, *l'erreur de la correction est au plus de 4 unités de l'ordre décimal* 2n *à partir du dernier chiffre de la racine approchée.*

Il y a avantage, dans la pratique, à mettre la formule sous une autre forme, en y remplaçant x par $N - a^2$; elle devient alors $\sqrt{N} = a + \frac{2a\ (N - a^2)}{3a^2 + N}$.

Le procédé ordinaire de l'extraction de la racine carrée donne immédiatement le moyen de former le carré de la racine approchée. Tout comme, si l'on reconnaît que la racine approchée par défaut le serait à plus d'une demi-unité, il est bien facile de modifier le résultat de manière

que le nombre a soit la racine approchée par excès à une demi-unité près, d'en former le carré, ainsi que la quantité négative $N - a^2$.

QUESTION D'EXAMEN

On sait que les trois systèmes d'équations fondamentales données dans les cours de trigonométrie pour la résolution des triangles quelconques peuvent se déduire les uns des autres, et que, en réalité, il n'existe que trois équations entre les côtés et les angles; on peut se croire en droit d'en conclure que, trois quelconques des six quantités précédentes étant données, on peut en déduire les trois autres. Or, on sait par la géométrie que, si l'on se donne les trois angles d'un triangle, celui-ci n'est déterminé que d'espèce, mais non pas de grandeur; en d'autres termes, les côtés sont indéterminés, mais le rapport de deux d'entre eux au troisième est connu. Il est donc utile de montrer qu'il n'y a pas contradiction entre la géométrie et la trigonométrie; on pourrait le voir facilement en ramenant tous les systèmes au premier, ou à la proportionnalité des sinus aux côtés; il n'y a que deux équations pour déterminer trois quantités (car on suppose que les angles donnés sont bien les angles d'un triangle, c'est-à-dire que leur somme est égale à 180°). Mais on peut aussi chercher à démontrer directement sur l'un quelconque des systèmes qu'il est indéterminé; c'est ce que nous allons faire ici.

Pour cela, nous admettrons comme une relation déjà connue l'égalité suivante, qui a lieu entre les trois angles d'un triangle :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

Considérons d'abord le système

$$\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}$$

Nous voulons prouver que ce système de trois équations se réduit à deux; pour cela nous allons diviser le tout par c par exemple, il vient

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cos C + \cos B$$

$$\frac{b}{c} = \cos A + \frac{a}{c} \cos C$$

$$1 = \frac{a}{c} \cos B + \frac{b}{c} \cos A$$

On tire facilement des deux premières, par élimination, les valeurs suivantes :

$$\frac{a}{c} \sin^2 C = \cos A \cos C + \cos B$$

$$\frac{b}{c} \sin^2 C = \cos B \cos C + \cos A$$

En multipliant la troisième équation par $\sin^2 C$, qui n'est pas nul, et remplaçant $\frac{a}{c} \sin^2 C$, $\frac{b}{c} \sin^2 C$ par les valeurs précédentes que nous avons déduites des deux premières, on a $\sin^2 C = \cos^2 B + \cos^2 A + 2\cos A \cos B \cos C$

Ce qui n'est autre chose que l'égalité fondamentale que nous avons admise; on voit donc que la troisième équation est vérifiée d'elle-même, ou qu'elle est une conséquence des deux autres.

Considérons maintenant le système

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

En ajoutant la troisième équation successivement aux deux premières, on obtient le système suivant :

$$a = b \cos C + c \cos A$$

$$b = c \cos A + a \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Des deux premières on tirera, comme précédemment,

$$\frac{a}{c} \sin^2 C = \cos A \cos C + \cos B$$

$$\frac{b}{c} \sin^2 C = \cos B \cos C + \cos A$$

Divisons les deux membres de la troisième par c^2, et multiplions ensuite par $\sin^4 C$, il viendra, en remplaçant $\frac{a}{c}\sin^2 C$, $\frac{b}{c}\sin^2 C$ par les valeurs qui précèdent, effectuant les calculs, après réduction

$$\sin^4 C = \cos^2 B\,(1 - \cos^2 C) + \cos^2 A\,(1 - \cos^2 C)$$
$$+ 2\cos A \cos B \cos C\,(1 - \cos^2 C)$$

ce qui donne en divisant par $\sin^2 C$, ou par son égal $1 - \cos^2 C$,

$$\sin^2 C = \cos^2 B + \cos^2 A + 2\cos A \cos B \cos C.$$

Nous retombons donc encore sur l'égalité fondamentale que nous avons admise, les conclusions précédentes sont donc encore acceptables, et par suite on voit que la trigonométrie nous montre bien, comme la géométrie, que, en donnant les trois angles d'un triangle, on détermine son espèce, mais non ses dimensions réelles.

A. M.

NOTE SUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE

Par **E. Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Si un carré entier augmenté ou diminué d'un nombre pair donne un carré parfait, le premier carré augmenté ou diminué de la moitié de ce nombre pair sera la somme de deux carrés.

Les deux cas à examiner ont une démonstration commune fort simple.

L'hypothèse donne $x^2 \pm 2\lambda = K^2$ (1)

Ce qu'on peut écrire, puisque K, suivant le signe de λ, est plus grand ou plus petit que x

$$x \pm 2\lambda = (x \pm \varepsilon)^2$$

On voit immédiatement que ε est pair, soit que x soit pair, soit que x soit impair ; on peut donc écrire

$$x^2 \pm 2\lambda = (x \pm 2\alpha)^2$$

ou $$x^2 \pm 2\lambda = x^2 \pm 4\alpha x + 4\alpha^2$$

d'où $$\pm 2\lambda = \pm 4\alpha x + 4\alpha^2$$

ou $\pm \lambda = \pm 2\alpha x + 2\alpha^2$

ou $x^2 \pm \lambda = x^2 \pm 2\alpha x + 2\alpha^2$

ou enfin $x^2 \pm \lambda = (x \pm \alpha)^2 + \alpha^2$ c. q. f. d.

Remarque. — Si l'on fait $x = 5$

$\lambda = 12$

les deux équations comprises sous la double égalité (1) ont lieu à la fois; $K = 7$ avec le signe plus et $K = 1$ avec le signe moins.

Cela donne la première solution en nombres entiers des équations indéterminées

$$x^2 + 2y = z^2$$
$$x^2 - 2y = t^2$$

NOTE DE GÉOMÉTRIE

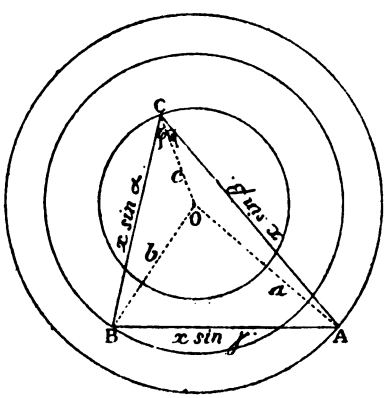
Par M. **Combier**, ingénieur en chef des ponts et chaussées.

(*Suite;* voir tome II, page 79.)

III. **Problème.** — *Déterminer un triangle semblable à un triangle donné, et dont les trois sommets reposent sur trois circonférences concentriques données.*

Solution trigonométrique.

Soit O le centre des trois circonférences, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ les trois rayons, α, β, γ les angles du triangle cherché connus par ceux du triangle donné auquel il doit être semblable. — Pour fixer les idées, nous supposerons que le sommet de l'angle α doit reposer sur la circonférence de rayon a, le sommet de l'angle β sur la circonférence de rayon b et le sommet de l'angle γ sur la



circonférence de rayon c. Tirons les trois rayons OA, OB, OC et désignons respectivement par φ et ψ les deux angles BCO, ACO dont la somme $\varphi + \psi$ doit être égale à γ si le centre O est situé à l'intérieur du triangle, et dont la différence $\varphi - \psi$ doit être égale à γ, si au contraire le centre O est en dehors du triangle à déterminer. Nous aurons donc :

$$(1) \qquad \varphi \pm \psi = \gamma$$

Si on désigne par m, n, p les trois côtés du triangle opposés respectivement aux angles α, β, γ, on a :

$$\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{n}{\sin \beta} = \frac{p}{\sin \gamma}$$

et si l'on représente par x l'une quelconque de ces trois expressions, les trois côtés m, n et p seront exprimés par une seule inconnue

$$m = x \sin \alpha \qquad n = x \sin \beta \qquad p = x \sin \gamma.$$

On connaît d'ailleurs la signification géométrique de x; c'est le diamètre du cercle circonscrit au triangle cherché.

Les deux triangles BCO, OCA donnent

$$(2) \qquad \begin{cases} a^2 = c^2 + x^2 \sin^2 \beta - 2cx \sin \beta \cos \psi \\ b^2 = c^2 + x^2 \sin^2 \alpha - 2cx \sin \alpha \cos \varphi \end{cases}$$

Il nous reste à éliminer φ et ψ entre les équations (1) et (2), pour obtenir une équation qui ne renferme plus que l'inconnue x.

L'équation (1) peut être remplacée par la suivante :

$$\cos \gamma = \cos (\varphi \pm \psi) = \cos \varphi \cos \psi \mp \sin \varphi \sin \psi$$

d'où $\qquad \pm \sin \varphi \sin \psi = \cos \varphi \cos \psi - \cos \gamma$

et en élevant au carré et remplaçant $\sin^2$ par $1 - \cos^2$

$$(3) \quad \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi - 2 \cos \varphi \cos \psi \cos \gamma - \sin^2 \gamma = 0.$$

Des équations (2) on tire :

$$\cos \varphi = \frac{x^2 \sin^2 \beta + c^2 - a^2}{2cx \sin \beta} \qquad \cos \psi = \frac{x^2 \sin^2 \alpha + c^2 - b^2}{2cx \sin \alpha}$$

Remplaçant $\cos \varphi$ et $\cos \psi$ par leur valeur dans l'équation (3) on a :

$$\frac{(x^2 \sin^2 \alpha + c^2 - b^2)^2}{4c^2x^2 \sin^2 \alpha} + \frac{(x^2 \sin^2 \beta + c^2 - a^2)^2}{4c^2x^2 \sin \alpha \sin \beta}$$

$$- \frac{2(x^2 \sin^2 \alpha + c^2 - b^2)(x^2 \sin^2 \beta + c^2 - a^2)}{4c^2x^2 \sin \alpha \sin \beta} - \sin^2 \gamma = 0$$

En chassant les dénominateurs et ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, on trouve

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} x^4 \sin^2\alpha \sin^2\beta\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma) \\ -2x^2\sin\alpha\sin\beta \left[\begin{array}{l} a^2\,(\sin\beta - \sin\alpha\cos\gamma) \\ +b^2\,(\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma) \\ +c^2\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \\ \qquad\qquad \sin\beta\cos\gamma) \end{array}\right] \\ +a^4\sin^2\alpha + b^4\sin^2\beta + c^4\sin^2\gamma - 2a^2b^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -2a^2c^2\sin\alpha\,(\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma) \\ -2b^2c^2\sin\beta\,(\sin\beta - \sin\alpha\cos\gamma) \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation est compliquée, mais on doit prévoir que les angles α, β, γ, doivent entrer d'une manière symétrique avec a, b, c et que cette équation est susceptible de simplification. En effet les trois angles α, β, γ ne sont pas arbitraires, puisque leur somme est égale à deux angles droits. En vertu de cette condition on démontrera aisément les formules suivantes :

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \sin^2\gamma$$
$$\sin\beta - \sin\alpha\cos\gamma = \sin\gamma\cos\alpha$$
$$\sin\alpha - \sin\beta\cos\gamma = \sin\gamma\cos\beta$$

et par suite l'équation (4) devient :

$$\left\{\begin{array}{l} x^4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \\ -2x^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(a^2\sin\alpha\cos\alpha + b^2\sin\beta\cos\beta + c^2\sin\gamma\cos\gamma) \\ +a^4\sin^2\alpha + b^4\sin^2\beta + c^4\sin^2\gamma - 2a^2b^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -2a^2c^2\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta - 2b^2c^2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha \end{array}\right\} = 0$$

Cette équation est du second degré par rapport à $x^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ et on en tire :

$$x^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$= \left\{\begin{array}{l} a^2\sin\alpha\cos\alpha + b^2\sin\beta\cos\beta + c^2\sin\gamma\cos\gamma \\ \pm\sqrt{\begin{array}{l} a^4\sin^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) + b^4\sin^2\beta(\cos^2\beta - 1) \\ \qquad + c^4\sin^2\gamma(\cos^2\gamma - 1) \\ + 2a^2b^2\sin\alpha\sin\beta(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta) \\ + 2a^2c^2\sin\alpha\sin\gamma(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma) \\ + 2b^2c^2\sin\beta\sin\gamma(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma) \end{array}} \end{array}\right.$$

mais la somme des angles α, β, γ, étant égale à deux droits,

$$\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma = \sin\alpha\sin\gamma$$
$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma$$

En conséquence :

$$x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \left\{ a^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^2 \sin\beta \cos\beta + c^2 \sin\gamma \cos\gamma \pm \sqrt{\begin{array}{l} -a^4 \sin^4\alpha - b^4 \sin^4\beta - c^4 \sin^4\gamma + 2a^2b^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta \\ + 2a^2c^2 \sin^2\alpha \sin^2\gamma + 2b^2c^2 \sin^2\beta \sin^2\gamma \end{array}} \right.$$

On remarquera que le radical représente quatre fois la surface du triangle construit avec les trois côtés $a \sin\alpha$, $b \sin\beta$ et $c \sin\gamma$; si donc l'on imagine ce triangle construit et qu'on désigne sa surface par S on aura :

$$(5) \quad x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = a^2 \sin\alpha \cos\alpha + b^2 \sin\beta \cos\beta + c^2 \sin\gamma \cos\gamma \pm 4S$$

Il est facile de voir que $x^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ représente le double de la surface du triangle cherché.

Revenons au triangle construit avec les trois côtés $a \sin\alpha$, $b \sin\beta$, $c \sin\gamma$, et désignons par C l'angle opposé au côté $c \sin\gamma$ dans ce triangle. On aura en vertu de théorèmes connus :

$$c^2 \sin^2\gamma = a^2 \sin^2\alpha + b^2 \sin^2\beta - 2ab \sin\alpha \sin\beta \cos C$$

$$4S = 2ab \sin\alpha \sin\beta \sin C.$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (5) par $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta}$ et qu'on y remplace 4S et $c^2 \sin^2\gamma$ par les valeurs ci-dessus, en remarquant que

$$\sin\alpha \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha = \sin(\alpha + \gamma) = \sin\beta$$

$$\sin\beta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\beta = \sin(\beta + \gamma) = \sin\alpha$$

$$\cos\gamma \cos C \mp \sin\gamma \sin C = \cos(\gamma \pm C)$$

on trouve, après réduction :

$$(6) \qquad x^2 \sin^2\gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma \pm C)$$

Le côté $x \sin\gamma$ opposé à l'angle γ dans le triangle cherché est donc le troisième côté d'un triangle, construit avec les deux côtés a et b comprenant un angle égal à $\gamma + C$ (ou à $\gamma - C$, ou $C - \gamma$, suivant que C sera plus grand ou plus petit que γ.)

Le problème trigonométrique consistera donc à calculer les angles A, B, C du triangle ayant pour côtés $a \sin\alpha$, $b \sin\beta$, $c \sin\gamma$, ou de tout triangle semblable à celui-là, par exemple, avec les trois côtés

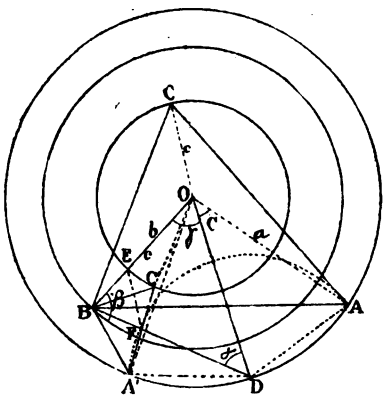
$$a, \quad \frac{b \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{c \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

et de calculer le troisième côté des triangles construits :

1° Avec les côtés a et b comprenant l'angle $\gamma + C$ ou $\gamma - C$;

2° Avec les côtés a et c comprenant l'angle $\beta \pm B$;

3° Avec les côtés b et c comprenant l'angle $\alpha \pm A$.



Mais l'équation (6) va nous fournir la solution graphique du problème.

Sur le rayon OB, construisons un triangle semblable au triangle donné, de telle sorte que l'angle au centre BOD $= \gamma$, l'angle OBD $= \beta$, l'angle ODB $= \alpha$.

Par le point E où le rayon OB rencontre la circonférence de rayon c, menons EF parallèlement au côté OD; on aura :

$$OD = \frac{b \sin \beta}{\sin \alpha} \quad BD = \frac{b \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$FD = BD \times \frac{c}{b} = \frac{c \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Si donc du point D comme centre, avec un rayon FD $= \frac{c \sin \gamma}{\sin \alpha}$, on décrit une circonférence qui coupe en A et A', la circonférence de rayon a, et qu'on tire les deux droites OA, OA', puis DA et DA', on aura construit deux triangles égaux DOA, DOA' avec les trois côtés

$$OA = OA' = a, \quad DA = DA' = \frac{c \sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad OD = \frac{b \sin \beta}{\sin \alpha}$$

lequel est semblable au triangle qui aurait pour côtés $a \sin \alpha$, $b \sin \beta$, $c \sin \gamma$; l'angle DOA est donc celui que nous avons désigné par C dans la formule (6), et si l'on tire les lignes BA et BA' on aura dans les triangles BOA et BOA' :

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma + C)$$
$$\overline{A'B}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma - C)$$

AB et A'B sont donc les deux valeurs du côté représenté par $x \sin \gamma$.

Connaissant le côté du triangle cherché reposant sur les circonférences de rayon a et b, il est bien facile de compléter la solution graphique.

Cette solution graphique a été indiquée par le résultat de calculs algébriques. Il est facile d'en démontrer l'exactitude par des considérations géométriques très-simples.

En effet, après avoir déterminé le côté BA par la construction indiquée ci-dessus, faisons l'angle BOC = BDA; on a : $\frac{FD}{BD} = \frac{OE}{OB} = \frac{c}{b}$, et à cause de FD = DA on a : $\frac{DA}{BD} = \frac{OE}{OB} = \frac{OC}{OB}$.

Les deux triangles BOC, BDA sont donc semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc l'angle CBO = ABD et par conséquent, l'angle CBA = OBD = β.

Mais les triangles semblables BAD, BOC donnent $\frac{BC}{BA} = \frac{OB}{BD}$, donc le triangle CBA est semblable au triangle OBD; ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.

On montrera de même qu'en faisant l'angle BOC' = BDA', le triangle BA'C' est semblable au triangle OBD et par conséquent au triangle donné.

La solution géométrique est beaucoup plus simple que la solution trigonométrique; mais nous tenons à constater que c'est cette dernière qui nous a conduit à la solution graphique, et que ce n'est qu'après l'avoir ainsi découverte, que nous avons pu en démontrer géométriquement l'exactitude.

Nous avons supposé que l'on prescrivait quel était celui des trois angles α, β, γ dont le sommet devait reposer sur chacune des trois circonférences données; mais le problème

dans sa généralité ne comporte pas cette restriction. On peut donc supposer le sommet de l'angle α sur la circonférence de rayon a; β étant sur la circonférence de rayon b ou sur celle de rayon c, ce qui donne deux cas particuliers, et comme à chacun répondent deux solutions, le sommet de l'angle α restant sur la circonférence de rayon a, il y aura ou pourra y avoir quatre solutions. En supposant le sommet des angles β et γ successivement sur la circonférence de rayon a, on aura huit autres solutions, en tout douze.

Ces douze solutions peuvent être toutes réelles, toutes imaginaires, en partie réelles, en partie imaginaires. Par exemple, avec l'hypothèse suivie dans les calculs ci-dessus, il faut qu'on puisse former un triangle avec les trois côtés $a \sin \alpha$, $b \sin \beta$, $c \sin \gamma$. Si le triangle est impossible avec ces côtés, l'hypothèse adoptée ne donnera lieu à aucune solution. Le problème peut donc être susceptible de deux, quatre, six, huit, dix, douze solutions, ou n'en comporter aucune. *(A suivre.)*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 124

Solution par MM. **Gindre** et **Faivre**, élèves du Lycée de Lons-le-Saulnier.

Construire un triangle dont on connaît la médiane AM *et la bissectrice* AD *issues du sommet ainsi que la différence des angles à la base.*

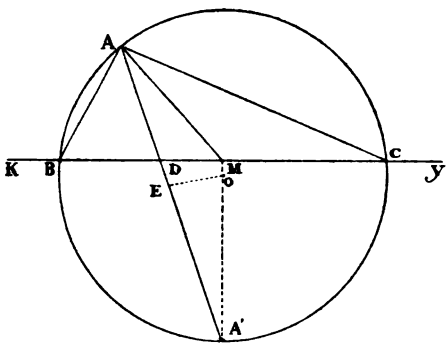
Supposons le problème résolu et soit ABC le triangle demandé.

L'angle MDA extérieur au triangle ADB est égal à $B + \frac{A}{2}$; de même l'angle ADB extérieur au triangle ADC est égal à $C + \frac{A}{2}$; par conséquent la différence de ces deux angles ou $MDA - ADB = B - C = \alpha$. D'autre part $MDA + ADB$

$= 180°$, donc $MDA = \frac{180 + \alpha}{2}$. Si nous construisons le cercle circonscrit au triangle ABC, la bissectrice AD prolongée passera par le milieu A′ de l'arc BA′C, il en sera de même de la perpendiculaire élevée au point M sur la droite BC.

De là la construction suivante :

Sur une droite indéfinie xy et en un point D quelconque menons une ligne DA égale à la bissectrice et faisant avec xy un angle yDA $\frac{180 + \alpha}{2}$. Du point A, avec une ouverture de compas égale à la médiane AM, décrivons un arc de cercle qui coupe xy en un point M. Joignons AM. Au point M élevons une perpendiculaire qui rencontre AD prolongée en A′. Cette droite MA′ renferme le centre du cercle circonscrit au triangle cherché, puisqu'elle est perpendiculaire sur le milieu d'une corde. Ce centre devant également se trouver sur la perpendiculaire élevée au milieu E de AA′, se trouvera à leur intersection O. Si donc de ce point comme centre avec OA′ pour rayon on décrit une circonférence, elle coupera xy en deux points B et C qui, joints au point A, forment le triangle cherché.



Pour que le problème soit possible, il faut avoir $AM > AD$, puisque dans le triangle AMD l'angle en D est toujours obtus.

Si $AM = AD$ le problème ne sera possible que si la différence des angles à la base est nulle. Alors le triangle est isoscèle.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Manceau, d'Orléans; Lannes, de Tarbes; Hoc, de Longwy; Cordeau, école Lavoisier; Junck, Vermand, de Saint-Quentin; Raspilaire, école des Mineurs, de Saint-Etienne; Chavanon, de Lyon; Ailleret, de Versailles; Tissier, d'Angoulême; Chretien, du Havre.

QUESTIONS PROPOSÉES

159. — Étant donnés quatre points dans un plan, construire un carré dont les quatre côtés passent chacun par un des points donnés.

160. — Soit ABC un triangle dans lequel les deux bissectrices de l'angle en A sont égales. Démontrer que le cercle décrit sur BC comme diamètre rencontre les côtés AB et AC en deux points P et Q, tels que CP = CQ. *(Launoy.)*

161. — Construire géométriquement un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent à ce côté, et sachant que les bissectrices de cet angle sont égales. *(Launoy.)*

162. — Étant donnés deux points P et P′ à l'intérieur d'une circonférence, sur un même diamètre et à égale distance du centre, on propose de mener deux parallèles PQ, P′Q′ terminées à la circonférence, et telles que le trapèze PQP′Q′ soit maximum. *(De Lonchamps.)*

CORRESPONDANCE.

M. d'Ocagne nous communique une note se rapportant à deux articles qu'il nous a déjà envoyés, et nous rappelant que la propriété qu'il a démontrée pour l'ellipse s'applique, sans modification, à l'hyperbole, et donne lieu aux mêmes conséquences.

Erratum. Dans le numéro de mars, page 67, ligne 4, il faut lire : *Etant contenu un nombre exact de fois dans* B, au lieu de : Étant contenu un nombre exact de fois dans R.

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 5210-9.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Combier**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

(*Suite ; voir page 120.*)

IV. **Problème.** — *Étant donnés les trois côtés d'un triangle* a, b, c, *on partage la base* a *en un point* D *qui divise cette base proportionnellement aux nombres* m *et* n ; *on tire la droite* AD ; *on demande de calculer la longueur de cette ligne* AD.

Abaissons la perpendiculaire AF sur la base FD et la projection de la ligne AD sur la base du triangle, et en considérant successivement les deux triangles ADC, ADB, on a :

$$b^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD \times FD$$
$$c^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2BD \times FD$$

mais on a $\frac{BD}{CD} = \frac{m}{n}$; d'où $BD \times n = CD \times m$

Multiplions par m les deux membres de la première des équations ci-dessus, et par n les deux membres de la seconde et ajoutons-les membre à membre, nous aurons :

$$mb^2 + nc^2 = (m + n)\,\overline{AD}^2 + m\overline{CD}^2 + n\overline{BD}^2$$

mais $\quad CD = \frac{na}{m + n} \qquad BD = \frac{ma}{m + n}$

$$m\overline{CD}^2 = \frac{mn^2a^2}{(m+n)^2} \qquad n\overline{BD}^2 = \frac{m^2na^2}{(m + n)^2}$$

$$m\overline{CD}^2 + n\overline{BD}^2 = \frac{mna^2}{m + n}$$

d'où $\quad mb^2 + nc^2 = (m + n)\,\overline{AD}^2 + \frac{mna^2}{m + n}$

et par suite :

$$\overline{AD}^2 = \frac{m}{m + n}\,b^2 + \frac{n}{m + n}\,c^2 - \frac{mn}{(m + n)^2}\,a^2$$

Supposons par exemple que BD soit le tiers de la base a, CD les $\frac{2}{3}$; $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}$, et il nous faut faire dans la

formule $m = 1$, $n = 2$, et l'on a :

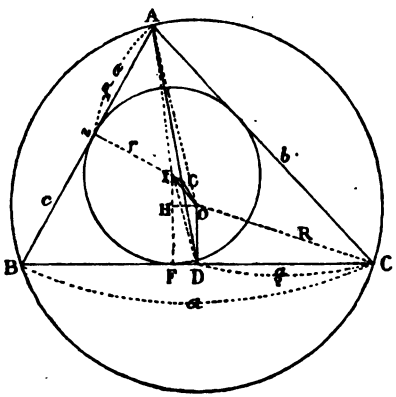
$$\overline{AD}^2 = \frac{1}{3} b^2 + \frac{2}{3} c^2 - \frac{2}{9} a^2$$

ou $$3\overline{AD}^2 = b^2 + 2c^2 - \frac{2}{3} a^2$$

V. — Nous allons appliquer cette formule à la résolution du problème suivant :

Calculer les distances du centre de gravité d'un triangle au centre du cercle circonscrit et au centre du cercle inscrit.

Soient $BC = a$, $AC = b$, $AC = c$ les trois côtés du triangle, D le milieu de la base $BC = a$. Le centre de gravité est en G sur la ligne AD aux $\frac{2}{3}$ de la distance $AD = a'$, à partir du sommet A.



Soit O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit. La ligne OG peut être considérée comme une ligne partant du sommet O du triangle OAD et aboutissant en un point G qui partage la base $AD = a'$ dans le rapport de 1 à 2 et d'après la formule du problème précédent.

$$3\overline{OG}^2 = \overline{OA}^2 + 2\overline{OD}^2 - \frac{2}{3} a'^2 = R^2 + 2\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{2}{3} a'^2$$

en appelant R le rayon du cercle circonscrit au triangle ou remplaçant $\overline{OD}^2$ par $R^2 - \frac{a^2}{4}$ et a'^2 par sa valeur

$$\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$3\overline{OG}^2 = 3R^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}\right)$$

ou $$3\overline{OG}^2 = 3R^2 - \frac{b^2}{3} - \frac{c^2}{3} - \frac{a^2}{3}$$

ou

$$(1) \qquad \overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

Le triangle IAD donnera de même :

$$3IG^2 = IA^2 + 2ID^2 - \frac{2}{3} a'^2$$

$$= IE^2 + EA^2 + 2(IF^2 + FD^2) - \frac{2}{3} a'^2.$$

Si on désigne par r le rayon du cercle inscrit, on a

$$IE = IF = r.$$

Si l'on considère que $2a + 2AE$ représente le périmètre $2p$, on aura $AE = p - a$.

De même $BF = p - b$, $FD = BD - BF = \frac{a}{2} - p + b$

$$= \frac{a}{2} - \frac{a + b + c}{2} + b = \frac{b - c}{2}.$$

Remplaçant les lignes par leurs valeurs, on trouve, toutes réductions faites :

$$(2) \qquad \overline{IG}^2 = r^2 + \frac{5}{9} p^2 - \frac{4}{9} (ab + ac + bc)$$

Si par le point O, on mène OH parallèle à la base, on formera un triangle rectangle dont l'hypoténuse IO sera la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit. En observant que l'angle DOC est égal à l'angle A du triangle ABC, on aura :

$$OD = R \cos A, \qquad IF = r$$

$$IH = r - R \cos A \qquad OH = FD = \frac{b - c}{2}$$

et par suite on trouve

$$OI = R^2 - 2Rr + 4Rr \sin^2 \frac{1}{2} A + r^2 - \frac{a^2 - (b - c)^2}{4}$$

or, on a :

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p - b)(p - c)}{bc}, \; r^2 = \frac{(p - b)(p - c)(p - a)}{p}$$

$$\frac{a^2 - (b - c)^2}{4} = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{4} = (p - c)(p - b)$$

donc $\quad 4Rr \sin^2 \frac{1}{2} A + r^2 - \frac{a^2 - (b-c)^2}{4}$

$$= (p-b)(p-c)\left[\frac{4Rr}{bc} + \frac{p-a}{p} - 1\right]$$

$$= (p-b)(p-c)\left[\frac{4Rr}{bc} - \frac{a}{p}\right]$$

or $\quad R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4pr} \quad$ d'ou $\quad \frac{4Rr}{bc} - \frac{a}{p} = 0$

par conséquent

(3) $\qquad \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

Cette distance ne dépend donc que de la valeur des deux rayons R et r.

Les formules (1) et (2) peuvent se mettre sous une autre forme, et les distances OG et IG exprimées en fonction des deux rayons R, r et du périmètre $2p$.

On a : $\qquad (a+b+c)^2 = 4p^2$

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+ac+bc)p - abc$$

$$= -p^3 + (ab+ac+bc)p - abc$$

$$R = \frac{abc}{4pr} \qquad abc = 4pRr$$

par conséquent :

$$pr^2 = -p^3 + (ab+ac+bc)p - 4pRr$$

d'où $\qquad ab + ac + bc = p^2 + r^2 + 4Rr$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 4p^2$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4p^2 - 2p^2 - 2r^2 - 8Rr = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

en conséquence les formules (1) et (2) deviennent

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{2}{9}(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

$$\overline{IG}^2 = r^2 + \frac{5}{9}p^2 - \frac{4}{9}(p^2 + r^2 + 4Rr) = \frac{1}{9}p^2 + \frac{5}{9}r^2 - \frac{16}{9}Rr$$

Posons $\qquad OG = m \quad IG = n \quad OI = q$

et nous aurons les trois équations :

$$\overline{OG}^2 = m^2 = R^2 - \frac{2}{9}(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

$$\overline{IG}^2 = n^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$$
$$\overline{OI}^2 = q^2 = R(R - 2r)$$

Ces trois formules vont nous fournir une très-élégante solution du problème suivant.

VI. **Problème.** — *Étant donné sur un plan le centre du cercle circonscrit à un triangle, le centre du cercle inscrit et le centre de gravité, construire ce triangle.*

Soient : C le centre du cercle circonscrit.
I le centre du cercle inscrit.
G le centre de gravité.

Si l'on désigne par m, n, q les distances de ces trois points, c'est-à-dire les côtés du triangle dont ils sont les sommets, en posant :

$$m = CG \quad n = IG \quad q = CI$$

si on désigne par R, r, $2p$ le rayon du cercle circonscrit, celui du cercle inscrit et le périmètre,
on aura, en vertu de formules précédemment démontrées :

$$(1) \qquad m^2 = R^2 - \frac{2}{9}(p^2 - r^2 - 4Rr)$$
$$(2) \qquad n^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$$
$$(3) \qquad q^2 = R^2 - 2Rr$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $+3$
Ceux de l'équation (2) par $+6$
Ceux de l'équation (3) par -2
et additionnons membre à membre ces trois équations ainsi modifiées, nous aurons :

$$(4) \qquad 3m^2 + 6n^2 - 2q^2 = (R - 2r)^2$$

Prolongeons la droite IG, et prenons sur ce prolongement la longueur $GI' = 2GI = 2n$, joignons CI'; je dis que CI' est égal à $R - 2r$.

En effet, le triangle CGI' donne :

$$\overline{CI'}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{I'G}^2 - 2CG \times I'G \times \cos CGI' = m^2 + 4n^2 - 4mn \cos CGI$$

Le triangle CGI donne à son tour

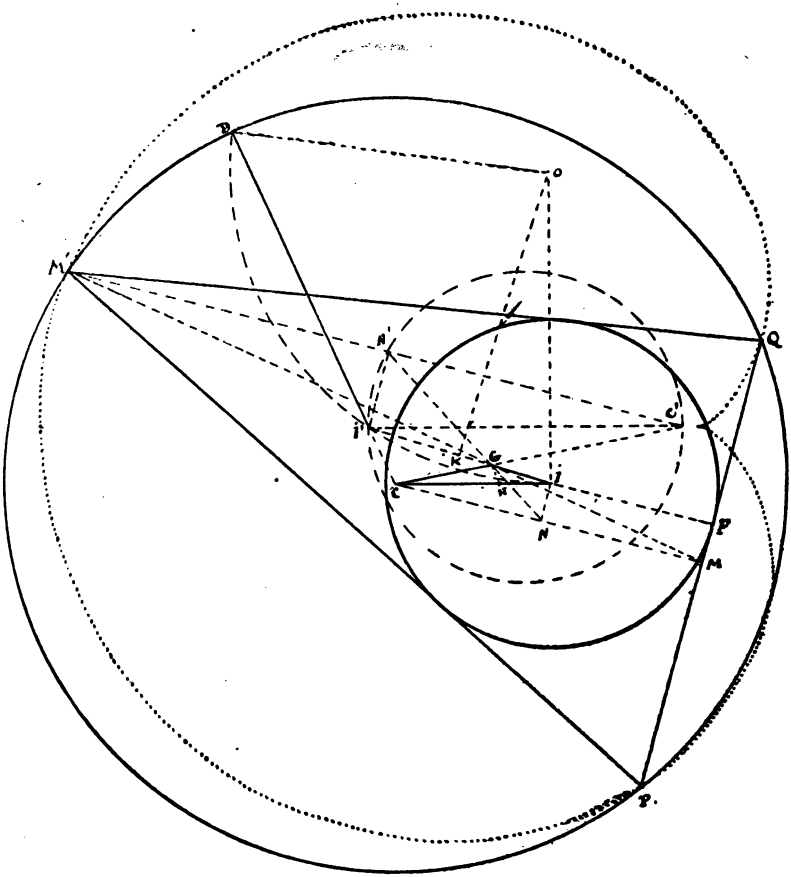
$$q^2 = m^2 + n^2 + 2mn \cos CGI'$$

et par suite $\overline{CI'}^2 + 2q^2 = 3m^2 + 6n^2$

ou bien $\overline{CI'}^2 = 3m^2 + 6n^2 - 2q^2 = (R - 2r)^2$

donc $CI' = R - 2r$

Décrivons maintenant une circonférence tangente à la droite CI au point I et passant par le point I'; cette cir-



conférence va couper en D le prolongement de la droite CI ; je dis que CD est le rayon du cercle circonscrit au triangle cherché, en même temps que la corde I'D est le diamètre du cercle inscrit.

En effet, on a, en vertu d'un théorème connu,

$$\overline{CI}^2 \text{ ou } q^2 = CD \times CI' = CD \times (R - 2r)$$

mais l'équation (3) donne $q^2 = R\,(R - 2r)$

donc $$R = CD$$

et $$I'D = R - CI' = R - (R - 2r) = 2r$$

Si donc du point C comme centre avec CD pour rayon, on décrit une circonférence, ce sera celle du cercle circonscrit au triangle cherché.

De même, si du centre I, avec la moitié de la corde I'D, on décrit une circonférence, ce sera celle du cercle inscrit.

Nous allons maintenant, par des considérations purement géométriques, compléter la solution de ce problème.

Supposons le problème résolu, et soit M'PQ le triangle qui satisfait aux conditions données.

Si du point C on abaisse une perpendiculaire sur le côté PQ, elle tombera en M, sur le milieu de PQ, et la droite M'M passera par le centre de gravité G, où elle sera divisée aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur.

Si on prolonge la droite CG d'une longueur GC' double de GC, on sait que le point C' est le point de concours des trois hauteurs du triangle; donc la droite M'C' est perpendiculaire à PQ et par conséquent parallèle à CM, et aussi à IF, ligne qui joint le centre du cercle inscrit au point de contact de sa circonférence avec le côté PQ.

Tirons la droite C'I', elle sera parallèle à CI et double de CI.

Abaissons du point I une perpendiculaire IN sur CM, et du point I' une perpendiculaire I'N' sur C'M'; les deux triangles CIN, C'I'N' seront semblables, comme ayant leurs côtés parallèles et C'I' étant double de CI, I'N' se trouve le double de IN.

Si maintenant on tire GN' et GN, on formera deux triangles GI'N', GIN qui seront semblables comme ayant un angle égal N'I'G' = NIG comme alternes-internes, compris entre deux côtés proportionnels, I'G double de IG, I'N' double de IN; donc l'angle NGI = N'GI' et comme les trois points I, G, I' sont en ligne droite, il en est de même des trois points N', G, N et GN' est double de GN.

Les droites M'N' et MN étant parallèles, les deux triangles

GN'M', GNM sont semblables et M'N' est double de NM, par conséquent double du rayon du cercle inscrit IF, et égal à la corde I'D.

L'angle I'N'C' étant droit, le point N' se trouve sur la circonférence décrite sur I'C' comme diamètre.

Si donc on décrit cette circonférence, que par le point C' on mène un rayon vecteur quelconque qui la coupe en N', et qu'on prolonge ce rayon vecteur d'une longueur N'M' égale à la corde I'D, le sommet M' du triangle cherché se trouvera sur le lieu géométrique de tous ces points M', et comme il doit se trouver aussi sur la circonférence du cercle circonscrit précédemment déterminé, il se trouvera au point de rencontre des deux courbes.

Le lieu géométrique déterminé par les rayons vecteurs partant du point C' et prolongés d'une longueur égale à la corde I'D au delà de leur rencontre avec la circonférence décrite sur C'I' comme diamètre, avec CI $= q$ pour rayon, ne doit pas seulement contenir le sommet M', il doit contenir les deux autres P et Q comme l'indique la figure où ce lieu géométrique est représenté par un trait pointillé. Mais il suffit de tracer avec soin le lieu géométrique dans le voisinage de l'un de ses points de rencontre avec la circonférence, un des sommets suffisant pour construire le triangle dont on connaît le cercle inscrit et le cercle circonscrit.

On chercherait vainement à résoudre graphiquement ce problème par l'emploi exclusif de la ligne droite et du cercle, les distances m, n et q, qui constituent les données de la question, sont toutes trois des fonctions symétriques des côtés et réciproquement. Donc toute équation qui pourra servir à déterminer l'un des côtés en fonction de m, n et q devra les donner tous les trois, elle sera donc du troisième degré.

Ce problème a été choisi pour montrer quels secours peut apporter le calcul à la recherche des éléments d'une figure géométrique, et à la solution graphique d'un problème.

NOTE SUR LA DIVISIBILITÉ

En général, lorsqu'on veut chercher un caractère de divisibilité par un nombre premier, les seuls nombres pour lesquels cette recherche soit utile, on tâche de trouver une puissance de 10 qui, divisée par le diviseur considéré, donne comme reste $+1$ ou -1. On en déduit alors un caractère de divisibilité analogue à la divisibilité par 3 ou par 11, en décomposant le nombre en tranches contenant un certain nombre de chiffres, à partir de la droite. Mais souvent, ce caractère de divisibilité donne lieu à une recherche encore pénible, outre qu'elle n'est pas applicable pour les nombres simples, c'est-à-dire pour les nombres les plus usuels. Nous allons indiquer, dans cette note, une manière de procéder très-générale, qui dans beaucoup de cas donne une méthode fort simple pour trouver le reste de la division par un nombre premier, et nous verrons comment on peut appliquer facilement cette méthode à la recherche de caractères de divisibilité par les nombres premiers inférieurs à 100. Pour cela, nous ferons usage des deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Lorsque le diviseur est de la forme* $10p - 1$, *on divise les dizaines du dividende par* p ; *à droite du reste on écrit les unités du dividende ; on fait la somme du nombre ainsi obtenu et du quotient. Cette somme ne diffère du dividende que d'un multiple du diviseur.*

En effet, soit A un nombre dont les dizaines sont D et les unités u, de telle sorte que l'on ait :

$$A = D \times 10 + u;$$

Posons en outre $N = 10p - 1$, et

$$D = pq + r;$$

il en résulte $D \times 10 = p \times 10 \times q + r \times 10$

et

$$A = p \times 10 \times q + r \times 10 + u = (N + 1)\, q + r \times 10 + u$$

ou encore $A = m.\, N + q + (r \times 10 + u)$.

Or, la partie entre parenthèses se formera bien en écrivant les unités du dividende à droite du reste de la division des dizaines par p; q est le quotient de cette division.

Remarque. — Si la somme $q + r \times 10 + u$ est supérieure à N, on appliquera encore la même règle, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne N ou un nombre inférieur à N. Dans ce dernier cas, ce nombre sera le reste de la division.

Théorème II. — *Lorsque le diviseur est de la forme* $10p + 1$, *on divise les dizaines du dividende par* p; *à droite du reste on écrit les unités du dividende; on fait la différence du quotient et du nombre ainsi obtenu; cette différence et le dividende donné ne diffèrent que d'un multiple du diviseur.*

En effet, en prenant les mêmes notations que précédemment, on aura

$$A = p \times 10 \times q + r \times 10 + u = (N - 1)\, q + r \times 10 + u$$

ou

$$A = m.\, N - [q - (r \times 10\, u)]$$

ou bien, si q est trop faible,

$$A = mN + [(r \times 10 + u) - q].$$

Le théorème est donc démontré.

On fera la même remarque que précédemment; on trouve comme reste, o, N ou un nombre inférieur à N; dans ce dernier cas, on aura le reste.

Ces théorèmes établis, nous allons pouvoir indiquer un caractère de divisibilité pour les nombres premiers inférieurs à 100. Pour cela, nous remarquerons qu'un nombre premier est terminé par un des chiffres 1, 3, 7 ou 9. (Nous laissons de côté, cela va sans dire, les caractères de divisibilité simples connus pour 2 et 5).

N	p
19	2
29	3
59	6
79	8
89	9

Si le nombre est terminé par 9, nous appliquons le premier théorème. Et, nous avons ainsi le tableau suivant :

Ainsi, par exemple, un nombre sera divisible par 59, si, en divisant les dizaines par 6, écrivant les unités à droite du reste et

faisant la somme de ce nombre et du quotient, on obtient un nombre divisible par 59.

Prenons par exemple le nombre 6077. Divisons par 6 les dizaines, nous aurons comme quotient 101 et comme reste 1 ; donc nous prendrons $101 + 17 = 118$.

De même 118 donnera $1 + 58 = 59$. Donc 118 est divisible par 59, et par suite il en est de même de 6077.

Si le nombre est terminé par 1, on emploiera le second théorème, et on pourra former le tableau suivant.

Prenons par exemple 7747 et cherchons si ce nombre est divisible par 61 ; divisons les dizaines par 6 ; nous avons comme quotient 129 ; le reste est 0 ; donc nous prendrons $129 - 7$ ou 122. Appliquons la même règle, nous avons $2 - 2 = 0$. Donc 7747 est divisible par 61.

N	p
31	3
41	4
61	6
71	7

Lorsque le nombre premier n'est terminé ni par 9, ni par 1, on remarquera qu'il est terminé par 3 ou par 7 ; par suite, on pourra ramener au premier théorème en multipliant par 3, ce qui donnera un nombre de la forme $10p - 1$, si le nombre considéré est terminé par 3 ; ou bien, s'il est terminé par 7, on pourra de la même manière, par une multiplication par 3, avoir un nombre de la forme $10p + 1$ et on sera ramené au second théorème. Nous pourrons former les deux tableaux suivants :

N	p
13	4
23	7
73	22
83	25

N	p
7	2
17	5
37	11
67	20

On voit que pour 67, il suffira de diviser les centaines par 2, d'abaiser à droite du reste les deux derniers chiffres, et d'appliquer le second théorème.

Il nous reste encore quatre nombres premiers inférieurs à 100; pour ces quatre nombres, nous allons déduire, encore, de nos théorèmes des règles très-simples pour la divisibilité.

Si nous prenons 43, en le multipliant par 7, on obtient 301, et alors, en appliquant le second théorème, nous diviserons les centaines par 3; à droite du reste, nous abaisserons les deux derniers chiffres; nous ferons la différence entre le nombre ainsi formé et le quotient, et nous verrons si cette différence est divisible par 43.

Exemple: 7783. Prenons le tiers des centaines; nous avons 25, et pour reste 2; nous chercherons la valeur de la différence 283 — 25; cette différence est 258; en la divisant par 43 directement, nous trouvons comme reste 0. Donc 7783 est divisible par 43.

Considérons 97; ce nombre est égal à 100 — 3. Si l'on appelle C les centaines du nombre, U le nombre formé par les dizaines et les unités, on a

$$A = C \times 100 + U = C \times 97 + 3 \times C + U.$$

Donc: *pour savoir si un nombre est divisible par* 97, *on fait le triple de ses centaines, et on y ajoute le nombre formé par les deux derniers chiffres; on cherche si ce nombre est divisible par* 97.

Exemple: 10573; on a $105 \times 3 = 315$; prenons $315 + 73$ ou 388; on trouve de même $3 \times 3 = 9$; $9 + 88 = 97$. Donc 10573 est divisible par 97.

De même, si l'on prend 47, comme $47 \times 2 = 94 = 100 - 6$, on verra que: *un nombre est divisible par* 47 *lorsque* 6 *fois ses centaines, augmentées du nombre formé par ses deux derniers chiffres de droite, donnent un nombre divisible par* 47.

Exemple: 7849. On a $78 \times 6 = 468$; $468 + 49 = 517$. $5 \times 6 = 30$; $30 + 17 = 47$.

Donc 7849 est divisible par 47.

Enfin, si l'on prend 53, on a $53 \times 2 = 106$; donc: *un nombre sera divisible par* 53 *lorsque la différence entre six fois ses centaines et ses unités sera divisible par* 53.

Exemple: 8851. On a $88 \times 6 = 528$; $528 - 51 = 477$; $4 \times 6 = 24$; $77 - 24 = 53$; donc 8851 est divisible par 53.

Il serait facile d'étendre l'emploi des deux théorèmes donnés à la recherche du caractère de divisibilité par un nombre premier quelconque; c'est seulement pour nous limiter que nous avons pris les nombres premiers inférieurs à 100, nombres qui reviennent plus souvent dans la pratique, et qui donnent lieu à des divisions assez simples.

Il peut être intéressant de déduire de l'emploi des théorèmes précédents certains caractères de divisibilité connus, Nous allons considérer, par exemple, la divisibilité par 3 et la divisibilité par 11.

Pour trouver un caractère de divisibilité par 3, nous multiplierons le diviseur par 3, ce qui nous donnera 9, et comme ici $p = 1$, on voit que l'on sera amené à prendre la valeur absolue du nombre formant les dizaines, et à ajouter à cette valeur les unités. Par exemple, si l'on a le nombre 45678, on sera amené à chercher si 3 divise exactement la somme $4567 + 8$. Mais, pour cela, je décomposerai le premier nombre 4567 de la même manière, et je serai amené à considérer $456 + 7 + 8$; en continuant de même je trouverai que : *un nombre quelconque est un multiple de* 3 (*ou de* 9), *augmenté de la somme des valeurs absolues de ses chiffres significatifs.*

Si nous considérons 11, nous verrons, en appliquant le second théorème, que nous devrons prendre la valeur absolue du nombre formé par les dizaines, et en retrancher les unités. Prenons le même nombre que précédemment 45678; nous serons amenés à considérer la différence $4567 - 8$. Si le chiffre des unités était inférieur au chiffre des dizaines, on verrait tout de suite qu'il suffirait de retrancher des dizaines du premier terme la différence entre les unités; pour montrer qu'il en est encore ainsi, je remarque que, pour faire l'opération, je prends la somme des deux nombres $(456 - 1) \times 10$, et $10 + 7 - 8$. En appelant D la différence précédente, j'ai donc

$$\begin{aligned} D &= (456 - 1) \times 10 + (10 + 7 - 8) \\ &= m\,11 - (456 - 1) + (11 - 1 + 7 - 8) \\ &= m\,11 - (456 - 7 + 8) \end{aligned}$$

En continuant de cette manière, on trouvera que : *un nombre*

quelconque est un multiple de 11, *augmenté de l'excès de la somme de ses chiffres d'ordre impair sur la somme de ses chiffres d'ordre pair.*

Enfin, on a $11 \times 9 = 99 = 100 - 1$. On en conclut immédiatement que *si l'on décompose un nombre quelconque en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche pouvant n'avoir qu'un chiffre, ce nombre est un multiple de* 11 *ou de* 9, *augmenté de la somme des valeurs absolues des tranches.*

On retrouve ainsi trois règles bien connues pour la divisibilité par 9 ou par 11.

A. M.

NOTE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

SUR LA SECTION PLANE DU CONE DROIT A BASE CIRCULAIRE

On sait que, si on coupe un cône droit à base circulaire par un plan, la section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole; c'est cette propriété qui a fait donner à ces courbes le nom de *sections coniques*. Il doit évidemment exister un certain nombre de propriétés communes à ces courbes et, en particulier, on doit pouvoir en donner une définition qui s'applique aux trois courbes. Cette définition, que l'on donne seule en Angleterre, est la suivante : *on appelle conique une courbe telle que le rapport des distances de chacun de ses points à un point fixe et à une droite fixe est constant.*

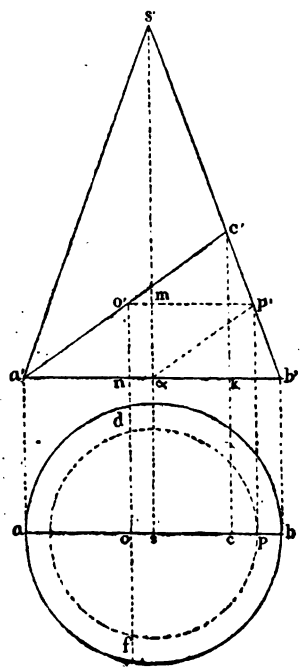
On peut facilement démontrer les propriétés générales de ces courbes en partant de cette définition, et en particulier le théorème qui va faire l'objet de cette note s'expose en quelques mots, et pour les trois courbes. Cependant, je me propose de le démontrer séparément pour chacune des trois courbes, en m'appuyant exclusivement sur les définitions connues et sur les propriétés que l'on démontre dans

tous les cours, en me rapportant au programme de l'École de Saint-Cyr. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Si l'on projette orthogonalement sur le plan de la base la section d'un cône droit à base circulaire par un plan, la courbe projection a pour foyer la projection du sommet, ou le centre du cercle de base.

Comme la projection reste identique à elle-même lorsque le plan de projection se déplace parallèlement à lui-même, nous prendrons, pour plus de simplicité dans la démonstration, le plan de base dans une position particulière, que nous indiquerons dans chaque cas.

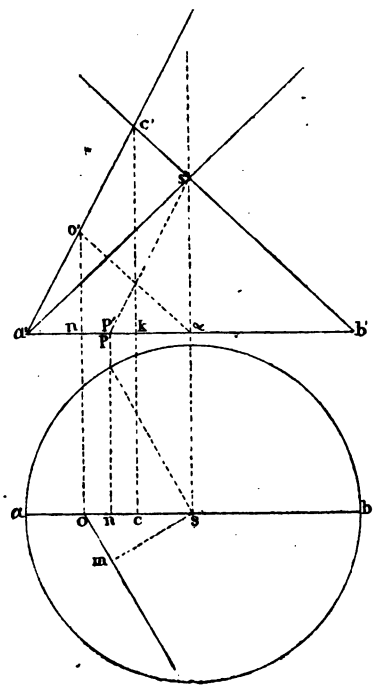
I. **La section est une ellipse.** — Je suppose le plan sécant perpendiculaire au plan vertical, et le plan de base passant par le point où le plan sécant rencontre la génératrice de front. On sait que *a'c'* représente le grand axe de l'ellipse de section, et *ac* le grand axe de la projection sur le plan de base. Pour avoir le petit axe, on prend le milieu *o'* de *a'c'*, et par ce point on mène un plan horizontal; il coupe le cône suivant un cercle qui se projette horizontalement suivant le cercle *sp*, et le plan sécant suivant une perpendiculaire au plan vertical, dont la projection horizontale est *df*. La portion de cette droite comprise dans l'intérieur du cercle *sp* représente le petit axe de la projection, et aussi la vraie grandeur du petit axe de la courbe. Pour montrer que le point *s* est foyer de la projection, il suffit de prouver que *sd* est égal au demi grand axe, ou à *ao*.



Dans le triangle *a'c'b'* la ligne *o'b'* est parallèle à *a'b'* et

passe par le milieu de $a'c'$; donc $o'p' = a'\alpha$; si, dans le parallélogramme $a'o'p'\alpha$ j'abaisse, des deux sommets opposés o' et α, des perpendiculaires $o'n$ et αm sur les côtés parallèles, il est facile de voir que $a'n = mp'$. Mais $a'n = ao$; $mp' = sp = sd$; donc $sd = ao$, et le point s est foyer de l'ellipse dont le grand axe est ac et le petit axe df.

II. **La section est une hyperbole.** — Je donne au plan sécant et au plan de base les mêmes positions que dans le cas précédent. $a'c'$ sera encore l'axe transverse de la section, et ac l'axe transverse de la projection. On sait que le lieu géométrique des projections du foyer sur les tangentes est un cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre, et que l'asymptote est une tangente dont le point de contact est à l'infini. Il en résulte que si du foyer on abaisse une perpendiculaire sur l'asymptote, la distance du centre au pied de cette perpendiculaire est égale au demi-axe transverse. Cette propriété est caractéristique du foyer pour un point de l'axe.



D'après cela, cherchons les asymptotes de la courbe, asymptotes qui se projettent suivant les asymptotes de la projection. Abaissons du point s la perpendiculaire sm sur l'asymptote om. Les triangles semblables spn, som nous donnent

$$\frac{om}{r - a} = \frac{sn}{r} = \frac{p'\alpha}{\alpha b'}.$$

D'autre part, si je joins le point o' au point α, la ligne $o'\alpha$

est parallèle à $c'b'$, puisque o' est le milieu de $a'c'$, et α le milieu de $a'b'$. Donc les triangles $a'o'\alpha'$, $p's'b'$ sont semblables, et ils donnent

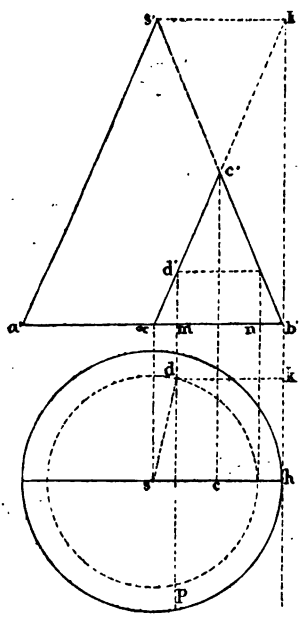
$$\frac{a'h}{h\alpha} = \frac{p'\alpha}{\alpha b'},$$

ou

$$\frac{a}{r - a} = \frac{p'\alpha}{\alpha b'}.$$

En comparant cette égalité avec les précédentes, on en tire $om = a$. Donc le point s est le foyer de la projection horizontale de la courbe.

III. **La section est une parabole.** — Je suppose toujours le plan perpendiculaire au plan vertical, et je prends pour plan de base un plan perpendiculaire à l'axe, passant par le point où cet axe rencontre le plan sécant. Je vais démontrer que la courbe, en projection horizontale, a pour foyer le point s, et pour directrice la droite hk. Pour cela, je coupe par un plan horizontal, qui détermine dans le cône une section circulaire se projetant suivant un cercle de centre s, et dans le plan sécant une droite perpendiculaire au plan vertical. Cette droite se projette horizontalement suivant dp, et le point d où elle rencontre le cercle précédent, est un point de la projection de la courbe. La distance dk de ce point à la droite hk est égale à $r - \alpha m$; la distance sd est égale à $r - b'n$, et comme le triangle $c'\alpha b'$ est isoscèle, puisque $c'\alpha$ est parallèle à $s'a'$, il en résulte que $\alpha m = b'n$; donc $dk = sd$; et comme le point d est quelconque, on voit que la courbe lieu des points d est une parabole ayant pour directrice hk et s pour foyer.



Le théorème est donc démontré dans les trois cas.

A. M.

CONCOURS GÉNÉRAUX

CONCOURS DE 1864

Classe de Seconde (Sciences).

On donne sur une droite quatre points A, B, C, D.

On a AB = 60^m, BC = 20^m, CD = 40^m.

Déterminer un point P duquel ces trois distances soient vues sous le même angle et calculer la distance PI de ce point à la droite ABCD et les distances BI, CI, PA, PB, PC et PD.

— Transformer l'expression

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z - \sin (x + y + z)}{\cos x + \cos y + \cos z + \cos (x + y + z)}$$

en la rendant calculable par logarithmes.

Classe de Rhétorique (Sciences).

Etant donné un parallélépipède rectangle, on détermine les centres de toutes ses faces : ces centres sont les sommets d'un polyèdre dont on demande le volume et la surface.

— Etant donnés une droite indéfinie AB et un point fixe O sur cette droite, on décrit de ce point fixe comme centre avec un rayon arbitraire, une circonférence de cercle. A partir de l'un des points C où cette circonférence rencontre AB on porte sur cette droite et du côté du centre une longueur CD égale à une longueur donnée, et l'on élève en D une perpendiculaire à AB. On demande le lieu des points M et M' où cette perpendiculaire rencontre la circonférence.

Classe de Philosophie.

Etant données les deux diagonales d'un quadrilatère, le construire de façon à lui donner la plus grande surface possible.

Soient A et B deux points dont la distance est un mètre. De chacun de ces points comme centre avec un rayon égal à un mètre on décrit un cercle. Calculer à un centimètre carré près l'aire de la partie commune aux surfaces des deux cercles.

Classe de Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle et un carré circonscrit; trouver la relation entre les tangentes des angles sous lesquels les deux diagonales du carré sont vues d'un point de la circonférence du cercle.

— Rendre calculable par logarithmes :

$$\sin (\alpha + \beta - \gamma) + \sin (\alpha + \gamma - \beta) + \sin (\beta + \gamma - \alpha) - \sin (\alpha + \beta + \gamma)$$

Départements.

Etant donné un triangle ABC, on demande de mener par le sommet C une droite CD telle que la somme des projections des côtés AC et BC sur cette droite soit égale à une longueur donnée. Discuter le problème.

Résoudre le même problème par la trigonométrie.

CONCOURS DE 1865

Classe de Troisième.

Une circonférence de cercle tourne dans son plan autour d'un de ses points et dans chacune de ses positions on lui mène des tangentes parallèles à une droite fixe donnée. On demande le lieu des points de contact.

— Un terrain de 60 arpents de Paris a été vendu à raison de 3000 livres tournois l'arpent. La valeur a doublé depuis cette époque. On demande d'évaluer en francs sa valeur actuelle et ce que vaut l'hectare, sachant :

1° que 80 francs valent 81 livres;
2° que l'arpent vaut 100 perches de 18 pieds de côté;
3° que le pied est la sixième partie de la toise;
4° que 10 millions de mètres valent 5130470 toises;

Classe de Seconde.

Étant donnée une équation du second degré, on demande d'en former une seconde qui ait pour racines les carrés des inverses de la proposée.

— On donne un angle trièdre à deux faces égales; on demande de le couper par un plan, de telle sorte que la section soit égale à un triangle équilatéral donné.

Classe de Rhétorique.

Soit CD la directrice d'une parabole, A son sommet, MN une tangente quelconque. On mène du point A une perpendiculaire AQ sur cette tangente; on prend à partir du point A une quantité AR = PQ. Trouver le lieu du point R.

— Trouver les côtés d'un triangle rectangle sachant que le volume engendré par ce triangle en tournant autour de son hypoténuse est équivalent au volume d'une sphère de rayon $\sqrt[3]{\frac{36}{5}}$ et que la somme des deux volumes engendrés par ce triangle en tournant successivement autour de chacun des deux côtés est équivalente au volume d'une sphère de rayon $\sqrt[3]{21}$

Classe de Philosophie.

Dans un cube donné on inscrit une sphère et dans cette sphère on inscrit un second cube. On demande le rapport des volumes de ces deux cubes.

Un bassin a la forme d'un prisme hexagonal régulier. Sa capacité est de 2000 hectolitres; sa profondeur est $1^m,50$. On demande la longueur des côtés de sa base.

Classe de Mathématiques élémentaires.

Étant donnés une circonférence AA'BB' et un point P, on mène par le point P deux sécantes PAA', PB'B qui coupent la circonférence donnée aux points A et A' B et B' respectivement.

Ensuite on circonscrit une circonférence à chacun des triangles PAB, PA'B'. Ces deux circonférences qui ont un point commun en P, se coupent en un second point M.

Cela posé, on demande de trouver le lieu géométrique décrit par le point M quand on fait varier l'une des deux sécantes, PAA', PB'B.

Départements.

Étant donné un triangle isoscèle, on demande le lieu des points du plan tels que la perpendiculaire abaissée de chacun d'eux sur la base du triangle soit moyenne géométrique entre les perpendiculaires abaissées du même point sur les deux autres côtés.

— Résoudre l'équation

$$\sin(x + a) - \sin(x - a) + 2m \cos^2 \frac{y}{2} = K$$

dans laquelle a, m, K sont des constantes données et sachant que

$$x + y = \frac{\pi}{2}.$$

Discussion. — Quelles conditions doivent remplir les constantes pour que $x = \frac{\pi}{4}$ et $y = \frac{\pi}{4}$ soient des solutions de l'équation.

— Interprétation des racines de

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

quand a converge vers zéro.

CONCOURS DE 1866

Classe de Troisième.

Étant donnés une circonférence et deux points A et B sur un même diamètre, on joint respectivement aux points A et B les extrémités P et Q d'un diamètre mobile PQ; les droites PA et QB ainsi obtenues les coupent en un point M.

On demande de trouver le lieu géométrique décrit par ce point M quand on fait mouvoir le diamètre PQ.

Classe de Seconde.

Etant donnés une sphère et un plan, on considère chaque point du plan comme le sommet d'un cône circonscrit à la sphère et qui a pour base, en conséquence, un petit cercle de cette sphère.

On demande de trouver le lieu géométrique des centres des petits cercles ainsi déterminés.

Classe de Rhétorique.

Résoudre à la manière des équations du second degré, l'équation

$$x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}.$$

— On a deux pyramides égales à bases carrées et dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On les assemble en faisant coïncider leurs bases, et l'on coupe le polyèdre qui résulte de cet assemblage par un plan mené par le milieu d'une arête, parallèlement à l'une des faces qui aboutissent à l'une ou à l'autre des extrémités de cette arête. On demande la forme de la section plane ainsi obtenue.

Classe de Philosophie.

On donne deux circonférences C et C′ et une droite perpendiculaire à la ligne des centres. Par chaque point P de la droite D on mène des tangentes à l'une et à l'autre circonférence, et dans chacune d'elles on joint les points de contact.

Les deux cordes de contact ainsi obtenues se coupent en un point M dont on demande le lieu géométrique.

Classe de Mathématiques élémentaires.

Étant donné un losange ABCD dans lequel la diagonale BD est égale à chaque côté, on mène par le sommet C une droite PQ qui rencontre en P et en Q respectivement les côtés AB et AD. On mène enfin les droites PD et QB qui se coupent en un point M.

Cela posé, on demande de trouver le lieu géométrique décrit par le point M quand la droite PQ tourne autour du sommet C.

CONCOURS DE 1870

Classe de Troisième.

Étant données deux circonférences tangentes extérieurement. On mène par le point de contact A, dans les deux circonférences, les cordes AB et BC, perpendiculaires entre elles. On joint par une droite BC les extrémités de ces cordes et l'on divise cette droite en deux parties qui soient dans un rapport donné.

Lieu des points de division M.

— Le plus petit multiple de deux nombres est 2,520, leur plus grand commun diviseur est 35. Trouver ces deux nombres, sachant qne l'un d'eux est les $\frac{8}{9}$ de l'autre.

Classe de Seconde.

Étant donné un tétraèdre dont toutes les arêtes sont égales, on abaisse de l'un des sommets une perpendiculaire sur la face opposée et l'on joint le milieu de cette perpendiculaire aux trois autres sommets. Démontrer que les trois lignes de jonction ainsi menées sont perpendiculaires deux à deux.

— Étant donnée une droite AB, trouver sur cette droite deux points de M et P tels que AM soit moyenne proportionnelle entre AP et MP et que MP soit moyenne proportionnelle entre MB et PB. (Solut. algébrique.)

Classe de rhétorique.

Étant donné un demi-cercle AB on demande de trouver sur la circonférence un point M tel que si l'on mène la tangente MP jusqu'à sa rencontre avec le diamètre prolongé, qu'on joigne le point M au centre, et qu'on fasse ensuite tourner la figure autour de AP, les volumes engendrés par le secteur AOM et par le triangle OMP soient entre eux dans un rapport donné.

Classe de philosophie.

Un triangle équilatéral ABC dont le côté est a, tourne autour d'une droite MN située dans son plan et parallèle à l'un des côtés BC. Quelle doit être la distance des deux parallèles BC et MN pour que le volume engendré par le triangle en tournant autour de MN soit égal à quatre fois le volume engendré par le même triangle tournant autour de son côté BC.

— Conversion d'une fraction ordinaire en fraction décimale. — Cas où le quotient est périodique.

Classe de mathématiques élémentaires.

On donne une circonférence O et un point P dans son intérieur. Par ce point on mène deux cordes rectangulaires quelconques APC, BPD. On forme le quadrilatère inscrit ABCD en joignant les extrémités de ces cordes. On trace ensuite les tangentes au cercle aux points A, B, C, D; les points de rencontre de ces tangentes concourantes forment un second quadrilatère.

Démontrer que ce second quadrilatère A, B, C, D est inscriptible dans un cercle dont le centre est sur la droite PO.

— Exprimer, au moyen du rayon du cercle O et de la distance OP et de l'angle de l'une des cordes avec OP, de l'angle APO par exemple, les segments des cordes, les côtes du quadrilatère inscrit, les segments des côtés du quadrilatère circonscrit et les sinus des angles de ce quadrilatère.

— Démontrer à l'aide des relations obtenues, que le produit des côtés du quadrilatère inscrit, la distance des centres des deux cercles et le rayon du second cercle demeurent invariables quand on fait tourner les cordes autour du point P.

CONCOURS DE 1872.

Classe de troisième

Étant donnés deux cercles qui se coupent, on propose de mener par l'un des points d'intersection A une corde AC telle que la partie MC comprise entre les deux circonférences soit égale à une ligne donnée.

— Extraire la racine carrée de 0,69444 ..... et expliquer le résultat auquel on parvient.

Classe de seconde

Étant donné un parallélipipède ABCDEFGH on mène les plans BDH et CEG et la diagonale AF et l'on demande :

1° En quels points les triangles BDH et CEG seront rencontrés par cette diagonale;

2° Dans quels rapports cette diagonale sera-t-elle divisée par les plans de ces triangles.

— Le volume d'un prisme est 36^{m} et si l'on augmente sa base de 7^{m} en diminuant sa hauteur de 1^{m}, le volume augmente de 12^{m}.

Trouver la base et la hauteur du prisme.

Classe de Rhétorique.

Etant donné un cercle, on lui circonscrit un parallélogramme que l'on fait tourner autour de l'une de ses diagonales. On demande : 1° de faire voir que la surface et le volume ainsi engendrés sont proportionnels.

2° De calculer cette surface et ce volume. Connaissant le rayon du cercle et l'aire du parallélogramme.

Classe de Philosophie.

Étant donnés un cercle O et une corde AB de ce cercle, on décrit d'un point quelconque M de la circonférence comme centre, un cercle tangent à AB et des extrémités A et B de cette corde on mène des tangentes à la circonférence ainsi décrite. Lieu géométrique des points P où ces couples de tangentes se rencontrent.

— Couper par un plan une sphère donnée de telle façon que la surface de la calotte sphérique détachée soit équivalente à la surface latérale du cône ayant même base et pour sommet le centre de la sphère.

Classe de Mathématiques élémentaires.

Un ballon a été observé en même temps de trois stations situées dans un plan horizontal et qui sont les sommets d'un triangle dont les côtés ont des longueurs connues. On a mesuré les angles formés avec le plan horizontal par les rayons visuels dirigés vers le ballon. — Déterminer la hauteur du ballon au-dessus du plan qui passe par les trois stations.

Examiner en particulier le cas où les stations sont les sommets d'un triangle équilatéral.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 70.)

Principe des couleurs. — Tons simples et purs. — En peinture, lorsqu'on ne cherche pas à se tenir dans les lois rigoureuses de la physique, on admet trois couleurs simples que nous nommerons les tons simples, et qui, par leur réunion, formeront le blanc; ce sont :

Le Jaune, couleur claire et brillante;

Le Rouge, couleur éclatante et demi-claire;

Le Bleu, couleur sombre.

Le noir est l'absence de lumière; ce n'est pas une couleur.

Lorsque ces tons sont à leur maximum de densité et qu'ils ne sont mêlés ni de noir ni de blanc, on dit que ces tons sont purs.

Tons rabattus, tons éclaircis. — S'ils sont mêlés de noir, on dit que les tons sont rabattus; s'ils sont mêlés de blanc, on dit qu'ils sont éclaircis.

Suivant la fraction de noir ou de blanc qu'ils contiennent ils peuvent être éclaircis ou rabattus à 1/10, 2/10, 3/10, etc.

Tons composites de 1er, 2e ou 3e ordre. — Si l'on mélange, par parties égales, les tons simples, on obtiendra les tons composites de premier ordre qui pourront être rabattus ou éclaircis.

Rouge et Jaune donnent Orange;
Jaune et Bleu donnent Vert;
Bleu et Rouge donnent Violet.

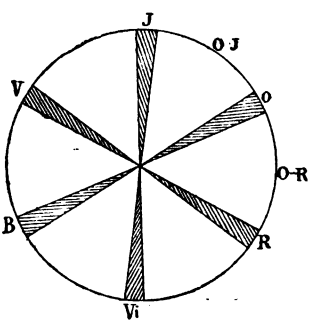
Si l'on mélange un ton composite de 1er ordre avec le ton simple qui en est le plus voisin, on aura un ton composite de 2e ordre.

Orangé et Rouge donnent Orangé-Rouge;
Orangé et Jaune donnent Orangé-Jaune, etc.

Les tons de 3e ordre s'obtiendront en mélangeant l'un des précédents avec la couleur simple du composite qui l'avoisine.

Orangé-Rouge et Rouge donnent Orangé-Rouge-Rouge, etc.

Rosace de couleurs pures. — On trace un cercle: on prend les points situés au sommet d'un triangle équilatéral et l'on y place les trois couleurs simples.



Sur les points situés à égale distance des précédents on placera les tons composites du premier ordre et ainsi de suite.

Cette rosace a été construite par M. Chevreul pour servir aux usages de la manufacture des

Gobelins. Il a construit également d'autres rosaces, donnant les tons de la précédente, mais éclaircis ou rabattus à 1/10, 2/10, etc. Il les a classés et dès lors il lui a été facile, étant donné un ton quelconque, d'indiquer la rosace à laquelle il appartient et la place qu'il y occupe.

Couleurs complémentaires. — Deux tons sont complémentaires lorsque par leur mélange ils donnent du blanc ou du gris non coloré.

Si l'on admet que les trois tons simples sont nécessaires pour former le blanc, on aura d'une manière approchée tous les tons complémentaires les uns des autres, en prenant sur la rosace des couleurs celles qui sont aux extrémités d'un même diamètre.

Le rouge	a pour complément	le vert.
Le jaune	—	le violet.
Le bleu	—	l'orange.

Couleurs usuelles. — On ne trouve que très-difficilement, dans le commerce, les couleurs pures; elles sont toujours plus ou moins mêlées à un pigment noir, de telle sorte que si l'on mélange deux couleurs complémentaires on n'obtiendra pas du blanc, mais du gris.

Si, de même, on mélange un jaune pur et un bleu pur du commerce, on n'obtiendra pas un vert pur mais un vert un peu gris : c'est ce qui explique les efforts des fabricants de couleurs pour arriver à créer directement toutes les nuances des tons purs et composites.

Pour le dessin de machines et le lavis, on n'a besoin que des couleurs suivantes:

Encre de Chine	Ombres.
Ocre jaune	Jaunes.
Gomme gutte	
Jaune indien	
Sépia	
Terre de Sienne brûlée.	Rouges.
Carmin	
Vermillon.	

Bleu de Prusse	Bleus.
Indigo	
Outremer ou Cobalt	

Teintes conventionnelles. — On a adopté, dans le dessin de machines, les teintes conventionnelles suivantes pour rendre la coloration des principaux matériaux que l'on emploie en mécanique.

Composition des teintes conventionnelles.

Fer, tôle, acier.	Bleu de Prusse.	18	20
	Encre de Chine.	2	
Fonte	Bleu de Prusse.	15	20
	Encre de Chine.	4	
	Carmin	1	
Laiton, bronze.	Gomme gutte.	18	20
	Carmin	2	
	Jaune ind. si c'est poss.	»	
Cuivre rouge.	Terre de Sienne brûlée .	10	20
	Carmin	10	
Bois.	Ocre jaune.	4	20
	Sépia	4	
	Terre de Sienne brûlée .	10	
	Carmin	2	

Terrains : — Sépia et Sienne brûlée avec touches plus intenses faites au pinceau.

Ouvrages en coupe : — Carmin très-étendu.

Lavis en camaïeu. — On nomme camaïeu une peinture faite avec un seul ton (bleu, rouge ou noir). Un lavis fait uniquement à l'encre de Chine est un camaïeu.

Il est facile de voir que dans un pareil lavis on rendra d'une manière approchée les effets des couleurs en se servant d'une teinte très-légère pour le jaune, puisque c'est une couleur claire, d'une teinte plus accentuée pour le rouge et d'une teinte plus foncée encore pour le bleu.

Causes de la couleur des objets. — Saturation, sursaturation, sous-saturation. — Un objet éclairé

par la lumière blanche nous paraît coloré, parce que cette lumière est décomposée à sa surface. Une portion est pour ainsi dire absorbée, tandis que l'autre est renvoyée. Si le rouge est absorbé, le vert est renvoyé. La couleur renvoyée est complémentaire de celle qui est absorbée.

Il existera un instant où la limite d'absorption sera atteinte. A ce moment, si l'on éclaire davantage la surface, toute la lumière blanche reçue ne sera pas décomposée: une portion nous sera renvoyée, et l'objet nous paraîtra teinté de sa couleur propre, mais mêlée de blanc, c'est-à-dire éclaircie.

Au contraire, si la lumière blanche éclairante diminue d'intensité, l'objet paraîtra plus sombre et teinté de sa couleur propre rabattue.

Il y aura saturation, dans le premier cas, sursaturation dans le second, et sous-saturation dans le troisième.

Conventions. — Orientations saturées, sursaturées et sous-saturées. — En dessin géométrique, il nous faut un point de départ défini, quoique conventionnel.

Nous conviendrons qu'un plan est à sa limite de saturation, c'est-à-dire à son maximum de coloration, ni teinté de noir, ni teinté de blanc, lorsqu'il est parallèle au plan de la projection que l'on regarde. Nous nommerons orientation saturée celle qui correspond à cette position. Si le plan se place plus normalement à la lumière, il se sursature et s'éclaircit; s'il fait le contraire, il se sous-sature et se rabat.

Il est facile de voir, en consultant les échelles, que sur les surfaces courbes, la zone saturée, c'est-à-dire celle sur laquelle nous devrons trouver la couleur propre de l'objet, ni rabattue ni éclaircie, sera celle comprise entre les lignes de teintes n°s 4 et 5. Il est très-important de retenir ce résultat.

(*A suivre.*)

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE CLERMONT

Novembre 1878.

1e Série. — Établir les formules de résolution d'un triangle rectiligne connaissant deux côtés et l'angle compris. Les appliquer à l'exemple suivant : $a = 4{,}732^m$, $b = 3{,}615.\ 9$, $C = 65^\circ\ 37'\ 6''$.

2e Série. — 1. Montrer que le triangle formé avec des longueurs inversement proportionnelles aux hauteurs d'un triangle est semblable à ce triangle.

2. Sachant que les hauteurs d'un triangle sont égales à 20 mètres, à 15 mètres et à 12 mètres. Calculer la surface et les côtés du triangle.

3e Série. — Résoudre $2 \cot g\, x + 3 \operatorname{tg} x = a$.

Discussion. — Application au cas de $a = 2\sqrt{6}$, calculer dans ce cas x en degrés, minutes et secondes.

FACULTÉ DE CAEN

Session d'avril 1879.

1re SÉRIE. — Démontrer qu'une tangente à la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et l'axe. — Montrer comment on peut construire la directrice quand on connaît le foyer et le point de contact de la tangente.

— La durée moyenne de la révolution sidérale de la lune étant égale à 27 jours, 32166, celle de l'année sidérale étant de 365 jours, 264, on propose de calculer en jours et fraction décimale de jour la durée de la révolution synodique de la lune et de convertir la fraction décimale obtenue en heures, minutes et secondes.

2e SÉRIE. — Simplifier $p\,(p-a) + (p-b)\,(p-c)$

$$\text{pour } p = \frac{a+b+c}{2}$$

— Calculer la bissectrice de l'angle A, connaissant b, c et le triangle étant rectangle.

3e SÉRIE. — Étant donnée la somme des rayons de deux sphères, étudier les variations de la somme de leurs volumes.

FACULTÉ DE PARIS

Session de novembre 1878.

Comment, en géométrie descriptive, obtient-on la distance d'un point à une droite?

— Trouver les expressions de sin x et de cos x en fonction de tg $\frac{x}{2}$. On remarquera que ces expressions sont des fonctions rationnelles de tg $\frac{x}{2}$. Pouvait-on prévoir ce fait à priori?

— Partager une droite donnée en deux parties proportionnelles aux carrés de deux lignes données.

— On donne une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre; par le point A et le centre C on mène deux droites parallèles AD et CE faisant avecle diamètre AB un angle x et rencontrant respectivement la demi-circonférence aux points D et E. On joint DE, BD, BE et l'on propose de déterminer l'angle x de façon que l'aire du trapèze ADEC soit le double de l'aire du triangle BED.

— Calculer le rayon de la base et la hauteur h d'un cône connaissant son volume représenté par $\frac{1}{3}\pi a^3$ et sa surface totale représentée par πb^2.

— Calculer la tangente de l'angle A d'un triangle sachant que les côtés ont pour longueur $a = 7$, $b = 4$, $c = 5$.

— Résoudre
$$\sin x + \sin y = a.$$
$$\cos x \cos y = b.$$
Appliquer à $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$.

— Le triangle ABC est rectangle en A, les côtés AB, AC ont une longueur b. Exprimer en fonction de b le volume engendré par la rotation du triangle autour de AX situé en dehors du triangle et faisant un angle de 30° avec AB.

— Le quadrant AB dont le centre est en O est divisé au point C en deux parties telles que la corde AC est le double de la corde CB. Calculer la tangente, le sinus et le cosinus de l'angle $\frac{BOC}{2}$.

— Calculer le premier terme d'une progression arithmétique connaissant la raison de cette progression et la somme des n premiers termes.

— Démontrer que le trinôme $x - 1 - x^2$ est négatif, quel que soit x.

— Rendre calculable par logarithmes la somme de deux tangentes.

— Etant donné un hémisphère on propose de le couper par un plan parallèle à la base de façon que le volume compris entre le plan et la surface sphérique soit égal à la demi-somme des cônes ayant pour base commune le cercle d'intersection et pour sommets le centre et l'extrémité du rayon perpendiculaire au plan.

— Etant donné un rectangle OABC, par le sommet O on mène dans l'intérieur du rectangle deux droites OA', OB', rencontrant respectivement les côtés AC et BC en A' et B' et faisant respectivement le même angle x avec les autres côtés OA et OB. On joint A' B'. Déterminer l'angle x de façon que l'aire du triangle OA' B' soit la somme des aires des triangles OAA' et OBB'.

— L'angle yox est droit. On porte sur oy une longueur OB $= h$, puis à la suite une longueur BC $= m$. Déterminer la longueur OA sur ox de telle sorte que les deux angles CAB, BAO soient égaux.

— Quelle relation doit-il y avoir entre les tangentes de trois angles pour que la somme de ces angles soit égale à 180°?

— Démontrer que le produit du plus petit commun multiple et du plus grand commun diviseur de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres.

— Examiner la variation de la surface d'un trapèze isoscèle circonscrit à une circonférence donnée.

Indiquer dans quel cas cette surface sera minimum.

— Dans une circonférence de rayon r, on mène un diamètre AB et une perpendiculaire CD à ce diamètre distante du centre d'une quantité d moindre que r. Déterminer les rayons des circonférences tangentes aux deux droites rectangulaires et à la circonférence donnée.

— Etant donné un triangle rectangle BAC, mener par le sommet de l'angle droit A une sécante telle qu'en abaissant les perpendiculaires CD, BE sur cette sécante, la somme des deux triangles ACD, ABE soit égale au triangle ABC.

— Soit un demi-cercle de diamètre AB. Déterminer sur ce demi-cercle un point M tel qu'en menant MN parallèle à AB et en joignant AM, on ait MN = 2 AM. Prendre pour inconnue l'angle MOA.

— On donne un rectangle ABCD, Trouver sur la base supérieure un point M tel qu'en le joignant au sommet A et en faisant tourner la figure autour de la base inférieure AB, la surface engendrée par AM soit égale à celle engendrée par CM.

— On donne l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, former une équation qui aurait pour racines les carrés des racines de la première. Si les racines de la première sont réelles, celles de la seconde le sont aussi. — La réciproque est-elle vraie ?

— De ce que $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$, peut-on en conclure que le triangle soit rectangle.

Session d'avril 1879.

Résoudre
$$a \sin x + b \sin y = a$$
$$a \cos x + b \cos y = b$$

— On donne dans un trapèze isoscèle les deux bases a et b et le côté c. On demande la longueur de la diagonale. Application numérique $a = 25$, $b = 7$, $c = 3$.

— Etant donnés un cercle et un diamètre AB de ce cercle, on considère le rectangle MNPQ dont deux sommets M et N sont à l'intersection du cercle et d'une parallèle à AB et dont les deux autres P et Q sont les projections de M et N sur AB. Déterminer la position de MN pour laquelle la surface de ce rectangle est maxima.

— Quels sont tous les angles x vérifiant l'équation $\cos 2x = \cos x$?

— Calculer les côtés d'un triangle sachant que les longueurs des côtés sont exprimés par trois nombres entiers consécutifs et que le nombre qui mesure la surface est égal à deux fois le nombre qui mesure le périmètre.

— Un mobile est abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné faisant un angle de 30° avec l'horizon. Quel sera l'espace parcouru au bout d'une minute ? quelle sera alors sa vitesse ?

— Trouver la somme des termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est a, la raison r et dont le nombre des termes est n. Pour

quelle valeur de a et de r cette somme sera-t-elle égale à n^2 quel que soit n?

— Résoudre $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c$.

— Étant donné un triangle équilatéral ABC, déterminer l'angle que fait avec le côté $AB = a$ une droite AD menée par le sommet A, dans l'intérieur du triangle, de manière que le volume engendré par le triangle partiel ABD tournant autour de AD soit égal à 4 fois le volume engendré par le triangle ACD tournant autour de cette même droite AD.

— Étant donné un triangle équilatéral ABC de côté a, on prend sur les côtés des longueurs $AA' = BB' = CC' = x$. Quelle doit être cette longueur x pour que l'aire du triangle A'B'C' soit la moitié de l'aire totale ABC.

— Un poids de 10 kilog. glisse sur un plan incliné de 45° sur l'horizon, en suivant une ligne de plus grande pente du plan. Quel est le travail accompli par la pesanteur pendant que le poids se déplace de A en B. $AB = 2^m$

— Calculer $\sin \frac{a}{2}$, $\cos \frac{a}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ connaissant $\cos a$.

— Etant donné un triangle de côtés a, b, c, et d'angles A, B, C, démontrer que les angles aigus x, y, z déterminés par les équations $\cos x = \frac{a}{b+c}$, $\cos y = \frac{b}{a+c}$, $\cos z = \frac{c}{a+b}$ vérifient les relations

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

— Étant donnée une demi-circonférence de diamètre $AB = 2R$ et la tangente AC à l'extrémité A du diamètre, on prend un point S sur le prolongement du diamètre AB, et on mène de ce point la tangente SC à la demi-circonférence; on demande de déterminer la distance AS de façon que l'aire latérale du cône engendré par la rotation du triangle SCA autour du côté SA soit équivalente à $\frac{3}{2}$ de l'aire de la surface engendrée dans cette rotation par la demi-circonférence.

— Déterminer toutes les valeurs de x qui satisfont à l'équation $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

QUESTIONS PROPOSÉES

163. — On donne une droite AB; un point C se déplace entre A et B. Sur AC et BC comme diamètres on décrit les circonférences O et O'. On mène une des tangentes communes extérieures qui rencontre en P et Q les tangentes en A et B. On mène PO et QO', ces deux lignes se coupent en un point M dont on demande le lieu géométrique. *(Julliard.)*

164. — Construire graphiquement l'angle x donné par l'équation $$\operatorname{tg} x = \frac{3 \sin \varphi \cos \varphi}{3 \cos^2 \varphi - 1}$$ où φ est un angle donné. (*Launoy.*)

165. — b et c sont deux côtés d'un triangle, l et l' les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle compris. Il existe entre ces quatre longueurs la relation

$$4b^2c^2 = l^2(b + c)^2 + l'^2(b - c)^2. \quad (\textit{Launoy.})$$

166. — On donne une ellipse dans laquelle la longueur du petit axe est moyenne proportionnelle entre celle du grand axe et la distance focale. Le centre du cercle inscrit au triangle formé par les deux foyers et un point quelconque de l'ellipse partage la normale en ce point en moyenne et extrême raison. (*Launoy.*)

167. — Construire un triangle, connaissant un côté, un angle adjacent et le rapport de la surface de ce triangle à celle du triangle formé par les deux bissectrices de l'angle donné et le côté opposé. Examiner le cas où ce rapport est égal à 2. (*Launoy.*)

Avis. — Nous prions nos correspondants de vouloir bien nous faire parvenir, le plus tôt possible, les sujets de composition donnés dans chaque académie au baccalauréat ès sciences à la session d'avril, ainsi que les sujets de concours académiques, aussitôt qu'ils seront connus. Nous rappelons à ce propos que toute communication ne faisant pas double emploi avec un sujet déjà publié sur les questions de concours ou d'examen, tant au baccalauréat qu'à l'École militaire, qui nous serait envoyé, serait accueilli avec reconnaissance.

Nous devons rappeler à nos correspondants les indications suivantes relatives à toute communication : Les solutions émanées de professeurs ne seront pas insérées ni signalées, à moins d'avis contraire. — Toute solution d'une question doit être sur une feuille isolée, ainsi que la figure, que l'on pourra fixer à la feuille relative à la solution correspondante. Chaque solution doit être signée. Les questions proposées doivent, autant que possible, être accompagnées d'un aperçu sur la solution; sont exceptées de cette condition les questions de concours et d'examen. — Enfin, pour éviter toute confusion ou un oubli involontaire, nous invitons nos correspondants à vouloir bien suivre, pour leur envoi, les indications mises sur la couverture.

A. M.

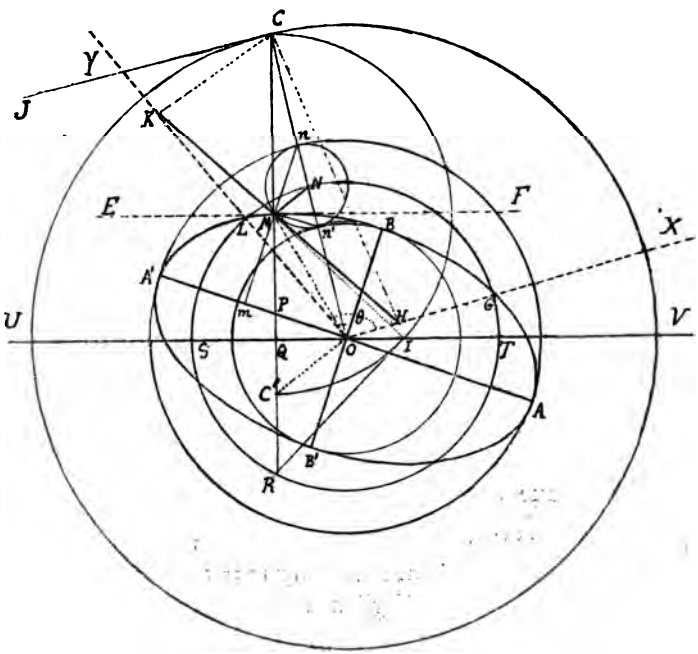
Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 8148-9.

NOTE DE MÉCANIQUE ET GEOMÈTRIE

Par M. H. Lecoq, professeur au Lycée de Constantine.

Le problème suivant de statique, à cause des notions de cinématique qu'il emprunte pour sa solution, conduit à un procédé particulier de construction pour la normale à l'ellipse et à une détermination simple de son rayon de courbure. C'est surtout à ce point de vue que la question offre de l'intérêt.



Etant données sur un plan vertical les traces OX *et* OY *de deux plans inclinés à l'horizon et perpendiculaires au plan vertical, placer dans ce dernier une droite* KH *pesante, homogène, de longueur donnée* l, *de telle sorte qu'étant posée par*

ses deux extrémités sur OX *et* OY, *elle soit en équilibre en faisant abstraction du frottement.*

Soit KH la position d'équilibre et θ l'angle YOX.

Élevons en K et H les perpendiculaires KC et HC à OK et OH ; le point C de leur rencontre est le centre instantané de rotation de la droite KH considérée comme mobile.

Le lieu du point C est une circonférence décrite du point O comme centre, car OC est le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère KOHC et il est égal à

$$OC = \frac{KH}{\sin YOX} = \frac{l}{\sin \theta}$$

Si donc l est constant il en est de même de OC.

La droite MN qui joint les milieux des diagonales de ce quadrilatère a aussi une longueur invariable, car

$$\overline{OK}^2 + \overline{KC}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{HO}^2 = l^2 + \frac{l^2}{\sin^2 \theta} + 4\overline{MN}^2$$

et comme $\overline{OK}^2 + \overline{KC}^2 = \overline{CO}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HO}^2$

on en tirera $$MN = \frac{l}{2} \operatorname{cotg} \theta$$

Le lieu des milieux M de KH est une ellipse passant par les points G et L tels que $OG = OL = \frac{l}{2}$. Les axes de cette ellipse sont dirigés suivant les bissectrices des quatre angles que forment les droites OX, OY et leurs prolongements.

Le petit axe est égal à $\frac{l}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$

Le grand axe à $\frac{l}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$

Le point C centre instantané de rotation de la droite KH est aussi celui de la droite de longueur constante MN dont les deux extrémités N et M glissent l'une sur la circonférence de rayon $ON = \frac{l}{2}$ et l'autre sur l'ellipse ABA'B', puisque CM est normale à la courbe que décrit le point M, c'est-à-dire à l'ellipse engendrée.

De plus, si N tourne autour de O d'un angle infiniment petit ω, le même point qui est le milieu de OC peut être

considéré comme tournant du même angle autour de C, mais en sens inverse. Pareillement dans un déplacement infiniment petit le point D tournera de l'angle ω autour de C centre instantané de la rotation MN.

Actuellement la condition d'équilibre proposée consiste en ce que la normale CM soit verticale ou que le milieu de la droite HK se trouve au point M de l'ellipse où la tangente EF' est horizontale. En effet, considérons un déplacement virtuel élémentaire qui se réduit à une rotation infiniment petite autour de C. Le travail virtuel des réactions normales de chacun des deux plans est nul de lui-même; le travail du poids appliqué au milieu M de KH est également nul, puisque le déplacement du point d'application est horizontal; donc l'équilibre a lieu.

Le problème ne sera possible que si, dans l'angle θ, on peut mener une tangente horizontale à l'arc d'ellipse intercepté entre les deux côtés de cet angle.

Conséquences :

I. a et b étant les deux demi axes de l'ellipse, on trouvera

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{a+b}{a}}, \cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$$

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$l = 2\sqrt{ab}, \quad OC = a+b, \quad ON = \frac{a+b}{2}, \quad MN = \frac{a-b}{2}$$

On conclut de ees valeurs la construction suivante de la normale en M.

Du centre O de l'ellipse décrivons deux circonférences avec $a+b$ et $\frac{a+b}{2}$ comme rayons; du point M comme centre et avec $\frac{a-b}{2}$ pour rayon décrivons un arc de cercle qui coupe la seconde en N; tirons ONC et CM sera la normale cherchée.

II. Traçons encore du point O comme centre avec a et b comme rayons deux circonférences; on aura

$$nN = n'N = MN = \frac{a - b}{2}$$

donc le triangle nMn' est rectangle.

Abaissons de n une perpendiculaire sur AA'; soit M_1 son point de rencontre avec l'ellipse; joignons $n'M_1$ et NM_1 (ces constructions ont été omises pour ne pas compliquer la figure). D'après une construction bien connue de l'ellipse, l'angle $nM'n'$ est droit; donc

$$NM_1 = \frac{nn'}{2} = \frac{a - b}{2}$$

et, par suite, M_1 coïncide avec M; en conséquence Mn' est parallèle à AA' et nM lui est perpendiculaire.

III. On en conclut

$$\frac{CM}{MP} = \frac{Cn'}{n'O} = \frac{a}{b}$$

ou, si l'on pose $CM = \beta$ et $MP = n$

$$\frac{\beta}{n} = \frac{a}{b}$$

Or on sait que le rayon de courbure ρ est égal au cube de la normale divisé par le carré du paramètre *,

soit
$$\rho = \frac{n^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}$$

donc on a aussi cette expression $\rho = \frac{\beta^3}{ab}$.

---

* M. Collignon, dans son traité élémentaire de mécanique pour l'enseignement élémentaire spécial, donne, par des considérations élémentaires, une expression du rayon de courbure de l'ellipse, dont il est facile de déduire l'énoncé précédent. En effet, si j'appelle p la distance du foyer F à la tangente en M, r le rayon vecteur correspondant, ρ le rayon de courbure, n la normale, M. Collignon établit d'abord la formule suivante

$$\rho \times \left(\frac{p}{r}\right)^3 = \frac{b^2}{a}.$$

Puis, il montre que la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante et égale à $\frac{b^2}{a}$;

Mais on a $\frac{p}{r} = \frac{\frac{b^2}{a}}{n}$; donc, on trouve

$$\rho\left(\frac{\frac{b^2}{a}}{n}\right)^3 = \frac{b^2}{a}; \text{ d'où } \rho = \frac{n^3}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2}.$$

IV. Détermination directe du rayon de courbure. ω étant l'angle infiniment petit dont se déplace N en tournant autour de O ou de C, soit φ l'angle infiniment petit correspondant dont se déplace M en tournant autour du centre de courbure C.

Rappelons que le rayon de courbure, comme celui d'un cercle, est égal au rapport d'un arc infiniment petit de sa circonférence à l'angle des normales menées à ses extrémités et que par conséquent l'arc est égal au rayon de courbure multiplié par l'angle en question exprimé en parties du rayon; on aura donc, si l'on convient d'affecter d'un accent les positions simultanées voisines des points N, M et C,

$$CC' = OC \times \omega = (a + b)\omega$$

$$RC \times \varphi = (\rho + \beta)\varphi = CC' \cos(\widehat{JC, EM}) = CC' \cos \widehat{MCN}$$

$$RM \times \varphi = \rho\varphi = CM \times \omega = \beta\omega.$$

JC étant la tangente en C à la circonférence UCV, on en déduira par l'élimination de CC' et du rapport $\frac{\omega}{\varphi}$

$$\beta(\rho + \beta) = \rho(a + b) \cos MCN;$$

or, le triangle MCN donne

$$\cos MCN = \frac{\beta^2 + ab}{\beta(a + b)},$$

d'où

$$\rho = \frac{\beta^3}{ab}.$$

V. Pour construire cette expression, remarquons que le triangle CMO et sa médiane MN donnent :

$$\overline{OM}^2 + \beta^2 = a^2 + b^2.$$

D'ailleurs on a évidemment :

$$\overline{CQ}^2 + \overline{QO}^2 = (\beta + MQ)^2 + \overline{QO}^2 = (a + b)^2$$

et

$$\overline{OM}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QO}^2;$$

d'où

$$\beta \times MQ = ab \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\beta^2}{MQ}.$$

Ce qui justifie la construction suivante :

Décrivons du point M comme centre avec CM ou β comme rayon, l'arc CI jusqu'à sa rencontre en I avec UV parallèle à la tangente EF, autrement dit avec le diamètre conjugué du rayon OM et au point I élevons une perpendiculaire à MI; cette perpendiculaire passera au centre de courbure.

VI. La même figure sert à démontrer aisément la relation MP. MQ $= b^2$ facile à traduire en langage ordinaire.

En observant que $\pi ab = \pi \frac{l^2}{4}$ on en conclut que l'aire de l'ellipse est équivalente à celle du cercle de diamètre l.

On établira aussi que β est moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs menés de M aux foyers de l'ellipse, d'où en les désignant par r et r'

$$\beta^2 = rr'$$

et par suite $$\rho = \frac{rr'}{MQ} = \frac{(rr')^{\frac{2}{3}}}{ab}$$

on arrivera à cette égalité en considérant le triangle des rayons vecteurs et en appliquant le théorème qui donne le produit de deux côtés en fonction de la bissectrice et des segments qu'elle détermine sur la ligne des foyers.

VII. Les projections de β sur les rayons vecteurs prolongés sont constantes et égales à b. C'est ce que l'on déduira des égalités suivantes, en appelant u leur angle

$$4C^2 = r^2 + r'^2 - 2\, rr' \cos u$$

$$r^2 + r'^2 = 2\overline{OM}^2 + 2C^2$$

$$rr' = \beta^2$$

par suite $$b^2 = \beta^2 \frac{1 + \cos u}{2}$$

et $$b = \beta \cos \frac{u}{2}$$

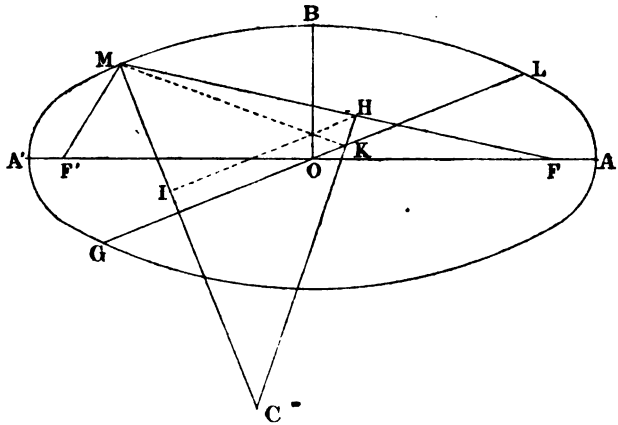
Cette remarque permet de simplifier encore la construction du centre de courbure en dispensant de tracer la circonférence UCV et en déterminant β au moyen de b et d'u.

Soient MF, MF' les rayons vecteurs, AA' le grand axe, OB le demi petit axe, O le centre et M le point considéré de l'ellipse.

Menons la normale MC où la bissectrice de l'angle F'MF $= u$; prenons MI $=$ BO $= b$ et menons par I la perpendiculaire IH à MI jusqu'à sa rencontre en H avec l'un des rayons vecteurs MF; on aura

$$b = MH \cos \frac{u}{2} \qquad \text{d'où } MH = \beta$$

Décrivons du centre M avec MH pour rayon l'arc HK jusqu'à sa rencontre avec la parallèle GOL à IH; enfin



élevons KC perpendiculaire à MK et le point C sera le centre de courbure.

Nota (fig. 1). — Si l'on prend MC' = MC = β on aura OC' parallèle à MN et double de cette ligne. Donc le lieu du point C' est une circonférence ayant son centre en O.

D'où ce résultat :

Si sur les normales à l'ellipse on prend à partir du point M de part et d'autre des longueurs égales à $\sqrt{rr'}$, le lieu des extrémités de ces droites seront deux circonférences concentriques ayant pour rayons $a + b$ et $a - b$.

La circonférence décrite sur CC' comme diamètre est donc celle qui contient le point I et sa tangente en I passe par le centre de courbure R.

VARIATION DU TRINOME

$$ax^4 + bx^2 + c.$$

---

1. Avant d'étudier cette variation, résumons celle du trinôme $ax^2 + bx + c$. Il peut se mettre sous la forme

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right];$$

et l'on voit que, x variant de $-\infty$ à $-\frac{b}{2a}$, puis de

$-\frac{b}{2a}$ à $+\infty$, le trinôme varie de $\pm\infty$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$, puis de $\frac{4ac-b^2}{4a}$ à $\pm\infty$, l'infini ayant le signe de a. Le trinôme prend les mêmes valeurs pour $x = -\frac{b}{2a} - \alpha$ et $x = -\frac{b}{2a} + \alpha$. Si a est positif, le trinôme a pour *minimum* $\frac{4ac-b^2}{4a}$; si a est négatif, cette même quantité est le *maximum* du trinôme; le minimum est négatif, nul ou positif, suivant que les racines sont réelles et inégales, égales ou imaginaires; c'est le contraire pour le maximum.

Le trinôme peut encore se mettre sous la forme

$$a(x - x')(x - x''),$$

x' et x'' étant ses deux racines. Cette décomposition fait voir immédiatement que la valeur du trinôme est de même signe que a, excepté quand x est compris entre les deux racines, ce qui ne peut arriver que quand elles sont réelles et inégales. C'est ce qu'on peut également conclure de la première décomposition.

Considérons maintenant le trinôme $ax^4 + bx^2 + c$.

2. Commençons par remarquer que le trinôme prend les mêmes valeurs pour $x = -\alpha$ et pour $x = +\alpha$; en sorte que x variant de $-\infty$ à o, le trinôme prend les mêmes valeurs que quand x varie de $+\infty$ à o.

3. Le trinôme peut s'écrire $a\left(x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right)$.

1° Si $\frac{b}{a}$ est positif, le facteur $x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}$ est constamment croissant avec la valeur absolue de x; par conséquent, x variant de $-\infty$ à o et de o à $+\infty$, ce trinôme diminue constamment de $+\infty$ à $\frac{c}{a}$, puis augmente constamment de $\frac{c}{a}$ à $+\infty$; il a donc seulement un minimum égal à $\frac{c}{a}$. En multipliant par a toutes les

valeurs que prend ce trinôme, on aura celles du trinôme $ax^4 + bx^2 + c$; donc, quand a et b sont positifs, x variant de $-\infty$ à o, et de o à $+\infty$,
le trinôme varie de $+\infty$ à c, et de c à $+\infty$;
et quand a et b sont négatifs, x variant de $-\infty$ à o, et de o à $+\infty$,
le trinôme varie de $-\infty$ à c et de c à $-\infty$.

Dans le premier cas c est un minimum, et dans le second cas c est un maximum.

2° Si $\frac{b}{a}$ est négatif, on sait que x^2 variant de $+\infty$ à $-\frac{b}{2a}$, le trinôme $(x^2)^2 + \frac{b}{a}(x^2) + \frac{c}{a}$ décroît constamment de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, et que x^2 décroissant à partir de $-\frac{b}{2a}$, le trinôme va constamment en croissant; donc x variant de $-\infty$ à $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, le trinôme $x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}$ décroîtra d'abord de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, puis x variant de $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à o, le trinôme croîtra de $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ à $\frac{c}{a}$; et x variant de o à $+\infty$, le trinôme repassera par toutes les valeurs précédentes.

En multipliant par a ces deux séries de valeurs, on aura celles du trinôme $ax^4 + bx^2 + c$; donc lorsque a est positif et b négatif, x variant de

$$-\infty \text{ à } -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

et de $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à o,

le trinôme varie de $+\infty$ à $\frac{4ac - b^2}{4a}$

et de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ a c,

en décroissant dans le premier intervalle et en croissant dans le second;

puis x variant de $\quad 0$ à $\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

et de $\quad \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à $+\infty$,

le trinôme varie de $\quad c$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$

et de $\quad \frac{4ac-b^2}{4a}$ à $+\infty$,

en décroissant dans le premier intervalle et en croissant dans le second.

Il y a deux minimums égaux à $\frac{4ac-b^2}{4a}$ et un maximum égal à c.

Mais si a est négatif et b positif, x variant de

$$-\infty \text{ à } -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

et de $\quad -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à 0,

le trinôme varie de $\quad -\infty$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$

et de $\quad \frac{4ac-b^2}{4a}$ à c,

en croissant dans le premier intervalle et en décroissant dans le second; puis x variant de

$$0 \text{ à } +\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

et de $\quad +\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ à $+\infty$,

le trinôme varie de $\quad c$ à $\frac{4ac-b^2}{4a}$

et de $\quad \frac{4ac-b^2}{4a}$ à $-\infty$,

en croissant dans le premier intervalle et en décroissan dans le second.

Il y a deux maximums égaux à $\frac{4ac - b^2}{4a}$ et un minimum égal à c.

4. Quant aux signes du trinôme, ils seront donnés facilement par la décomposition en facteurs. On a

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - y'')(x^2 - y''),$$

y' et y'' étant les racines du trinôme $ay^2 + by + c$.

Si les racines y' et y'' sont négatives ou imaginaires, le produit $(x^2 - y')(x^2 - y'')$ est constamment positif; par conséquent la valeur du trinôme est constamment du signe de a.

Si y' est négatif et y'' positif, le facteur $x^2 - y'$ est positif; mais le facteur $x^2 - y''$ ou $(x + \sqrt{y''})(x - \sqrt{y''})$ n'est positif que si x n'est pas compris entre les racines $-\sqrt{y''}$ et $+\sqrt{y''}$; en sorte que x variant de $-\infty$ à $-\sqrt{y''}$ ou de $+\sqrt{y''}$ à $+\infty$, le trinôme prend le signe de a; et que x variant de $-\sqrt{y''}$ à $+\sqrt{y''}$, la valeur du trinôme est de signe contraire à a.

Si y' et y'' sont tous deux positifs, le trinôme prend le signe de a quand x^2 n'est pas compris entre y' et y''; et comme

$$(x^2 - y')(x^2 - y'') = (x + \sqrt{y''})(x + \sqrt{y'})(x - \sqrt{y'})(x - \sqrt{y''})$$

on peut dire que le trinôme est positif quand la valeur de x est supérieure ou inférieure à un nombre pair des quatre quantités

$$-\sqrt{y''},\quad -\sqrt{y'},\quad +\sqrt{y'},\quad +\sqrt{y''}.$$

Ainsi le trinôme prend le signe de a quand x est inférieur à $-\sqrt{y''}$ ou compris entre $-\sqrt{y'}$ et $+\sqrt{y'}$ ou supérieur à $+\sqrt{y''}$; et il est de signe contraire à a quand x est compris entre $-\sqrt{y''}$ et $-\sqrt{y'}$ ou entre $+\sqrt{y'}$ et $+\sqrt{y''}$.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 151.)

Des teintes. — Transparence et intensité d'une teinte. — Une teinte d'encre de Chine ou de couleur appliquée sur le papier agit comme un verre coloré ou teinté qui ne laisse passer qu'une fraction de la lumière qui est distribuée à ce papier et qui nous est renvoyée par lui.

Nous appellerons transparence d'une teinte, la fraction de la lumière que laisse passer cette teinte.

L'intensité serait la fraction de lumière arrêtée.

Si on représente par T la transparence et par I l'intensité, on aura $T + I = 1$.

Problème n° 1. — Quelle est la transparence finale T″ de deux teintes superposées de transparence T et T′? — On aura: $T'' = T \times T'$

En effet, la teinte de transparence T′, par définition, laisse passer une fraction T′ de la teinte sur laquelle on l'applique; si donc cette teinte n'a qu'une transparence T, la transparence totale sera $T \times T'$.

Conséquences: 1° Si l'on prend une série de teintes égales superposées, tandis que le nombre des teintes croîtra en proportion arithmétique, la transparence finale décroîtra en proportion géométrique;

2° Si l'on passe une même teinte sur deux autres teintes inégales, l'assombrissement relatif le plus considérable sera produit sur la teinte la plus faible.

Problème n° 2. — Réaliser au lavis à l'encre de Chine une teinte de transparence connue, $\frac{2}{3}$ par exemple.

Avec un tire-ligne rempli d'encre absolument noire on tracera une série de traits parallèles et équidistants. Ces

traits auront une épaisseur constante, $\frac{1}{2}$ millimètre, par exemple, et les blancs compris entre eux auront un millimètre. Vue de loin, une feuille de papier ainsi réglée paraîtra teintée. La surface des blancs sera les $\frac{2}{3}$ de la surface totale et par suite on peut admettre, en ne tenant pas compte des effets d'irradiation, que la transparence de la teinte ainsi figurée sera $\frac{2}{3}$. Il sera facile ensuite de mélanger d'eau une teinte d'encre de Chine, de telle sorte que la teinte qu'elle fournira au pinceau soit équivalente à celle que nous venons de créer au tire-ligne.

Mélange des teintes dans le godet. — Problème n° 3. — On a dans un premier godet un volume V de teinte de transparence t et dans un deuxième godet un volume V′ de teinte de tranparence t'. On les mélange; quelle sera la transparence t'' de la teinte ainsi formée?

Imaginons, pour fixer les idées, que la couche d'eau teintée déposée par le pinceau ait une épaisseur constante E.

Répartissons la teinte du premier godet entre n diaphragmes sans épaisseur, séparés entre eux par une distance E. Au lieu du volume V on pourra, si les diaphragmes ont pour surface l'unité, prendre la quantité nE.

$$V = nE.$$

La deuxième teinte répartie de même aura un volume V′ représenté par n'E.

La transparence de la teinte comprise entre deux diaphragmes du premier vase est T, et puisque, nous avons n diaphragmes, la transparence finale des n diaphragmes du premier vase regardés en totalité sera $T = t^n$; de même la transparence finale des n' diaphragmes du deuxième vase régardés en totalité sera :

$$T_2 = t'^{n'}$$

Si nous plaçons les deux vases au bout l'un de l'autre la transparence totale sera :

$$T_3 = T \times T_2 = t^n t'^{n'}$$

Mais il est évident qu'il reviendrait au même de mêler d'abord ces deux teintes et de les diviser en $n + n'$ diaphragmes, ou de faire ce que nous venons d'indiquer. D'ailleurs, il est facile de vérifier par expérience que si dans une cuve transparente on place deux teintes d'inégale intensité, séparées par une lame de verre, la transparence totale sera la même, si on laisse cette lame sans mêler les teintes ou si on a enlevé la lame en les mêlant.

Soit t'' la transparence de la teinte résultante, d'épaisseur E comprise alors entre deux diaphragmes, on aura :

$$T_s = t''^{(n+n')}$$

d'où l'on déduit : $t'^{n+n'} = t^n t'^{n'}$,

ou : $t''^{(v+v')} = t^v t'^{v'}$,

et $$t'' = \sqrt[v+v']{t^v t'^{v'}}$$

Cette formule donnerait le moyen de créer par des mélanges convenables une teinte de transparence déterminée, une fois constituée comme ci-dessus, une autre teinte de transparence connue.

Si l'on veut opérer par des additions d'eau, l'eau ayant une transparence $t = 1$, on fera dans la formule $t = 1$. Si, de plus, on prend pour unité le volume de la teinte à modifier, la formule précédente se simplifiera en faisant $v' = 1$.

Exemple. — Quel volume d'eau faut-il ajouter à un volume égal à l'unité de teinte $\frac{2}{3}$ pour obtenir la teinte $\frac{4}{5}$.

La formule générale est $T''^{(v+v')} = T^v \times t'^{v'}$

On fera : $t = 1 \quad v' = 1 \quad t = \frac{2}{3} \quad t'' = \frac{4}{5}$

Il viendra $t''(v + 1) = t'$

et $(v + 1) \log t'' = \log t'$

$$V = \frac{\log t' - \log t''}{\log t''} = \frac{\log \frac{2}{3} - \log \frac{4}{5}}{\log \frac{4}{5}}$$

$$= \frac{007918}{009681} = 0$$

Pour faire un godet de teinte $\frac{4}{5}$ avec un godet $\frac{2}{3}$, il faudra l'additionner des 0.82 de son volume d'eau pure.

Dans la pratique, on ne s'inquiète jamais de faire rigoureusement ces mélanges, ce n'est qu'après avoir exécuté de nombreux exercices de lavis que l'on arrive à la juste appréciation des mélanges à faire pour avoir les teintes convenables. Il est bon d'avoir un gros pinceau qui sert de jauge et à l'aide duquel on additionne d'eau les teintes comme nous l'indiquerons plus loin.

Classification des teintes. — Nous diviserons ces teintes en quatre séries * :

1° La teinte d'ébauche (teinte n° 0). C'est une teinte d'encre de chine de transparence $\frac{2}{3}$ environ, que l'on place sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée;

2° Les teintes d'ombre propre et les demi-teintes au nombre de quatre (teinte 1, 2, 3, 4). Ce sont encore des teintes d'encre de chine.

La teinte n° 1 s'obtient en additionnant de 1/6 environ d'eau pure la teinte 0, et se passe entre les lignes $+ 1$ et $\overline{1}$.

La teinte n° 2 se passe entre $+ 2$ et $\overline{2}$. On l'obtient en additionnant encore la teinte 1 avec de l'eau et ainsi de suite.

3° Les teintes de couleurs au nombre de trois (teintes 5, 6 et 7).

Elles sont diversement composées, suivant la nature de l'objet et vont en augmentant de transparence. (Voir teintes conventionnelles). On les passe entre $+ 5$ et $\overline{5}$, $+ 6$ et $\overline{6}$, $+ 7$ et $\overline{7}$. Sur le modèle en chromolithographie, il n'y a pas de teinte n° 8 et l'on a laissé la zone brillante complétement blanche. Dans les dessins lavés, on passera une teinte n° 8 excessivement légère;

4° Teintes d'ombres portées (teintes n°s 9, 10, 11, 12, etc.). D'après ce qui a été dit sur l'intensité des ombres, on sait

(*) Voir pour les limites indiquées ici le *Traité des Ombres et du Lavis*, et les tracés précédents pour la sphère (pp. 78 et 112). Voir aussi les modèles de lavis (Libr. Delagrave).

qu'une zone dans l'ombre portée sera d'autant plus noire qu'elle eût été plus claire si elle n'eût pas été dans l'ombre.

Si donc certains cônes ou cylindres étaient dans l'ombre portée, la zone + 7 devrait être la plus noire; viendraient ensuite les zones + 7, + 6, + 5, etc.

On devrait donc, dans ce cas, passer une première teinte noire, plus noire que la teinte d'ébauche, sur la zone 7. Une deuxième teinte s'étendant jusqu'à la ligne + 6 et recouvrant les zones + 7 et + 6 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la ligne n° 0.

On remarquera que ces teintes doivent être plus intenses que les précédentes pour plusieurs raisons : 1° il faut qu'elles détruisent l'effet de dégradation produit par les précédentes et en sens inverse de celui que l'on veut maintenant obtenir; 2° il faut qu'elles produisent une nouvelle dégradation; 3° elles s'appliquent sur une région fortement teintée déjà et, comme on l'a vu plus haut, leur effet relatif en est diminué.

Pratique du lavis. — Pratiquement, on opérera ainsi : avec le gros pinceau servant de jauge, on mesurera dans le godet 6 forts pinceaux d'eau pure. Dans cette eau, on délayera l'encre de Chine de manière à donner naissance à une teinte $t = \frac{2}{3}$ environ. Ce sera la teinte d'ébauche n° 0 que l'on passera sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée, indistinctement. Cela fait, on y ajoutera un pinceau d'eau, ce qui donnera la teinte n° 1 passée des lignes + 1 à $\bar{1}$. On ajoutera à cette teinte deux pinceaux d'eau, ce qui donnera la teinte 2, passée de + $\bar{2}$ à $\bar{2}$. — On y ajoutera trois pinceaux d'eau ce qui donnera la teinte + 3 et ainsi de suite.

Ombres portées. — On fera dans 6 pinceaux d'eau une teinte $t = 1/2$, c'est-à-dire plus forte que la teinte d'ébauche et on la passera sur les zones qui sont dans l'ombre portée et qui eussent été les plus claires sans l'existence de cette ombre. — On y ajoutera un pinceau d'eau et on la

passera à cheval sur la précédente en avançant d'une ligne de part et d'autre, et ainsi de suite jusqu'à venir se souder sur la ligne d'ombre propre n° 0.

(*A suivre.*)

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

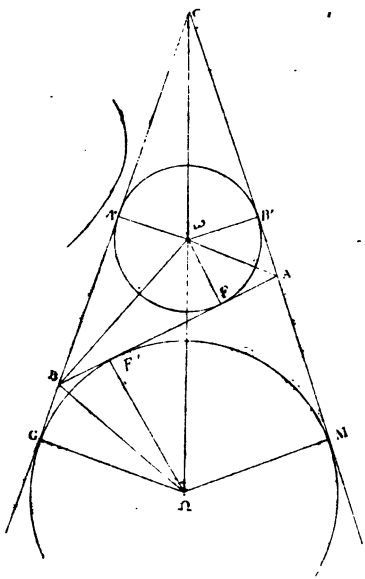
Note du traducteur. — En publiant cette note, nous avons pour but de rappeler un certain nombre de formules connues de nos lecteurs, et en même temps de leur donner sur le triangle des formules nouvelles, que le Rev. James Booth a publiées dans un ouvrage qu'il a eu bien juste le temps de terminer, puisque la préface du second volume est datée du premier jour de l'an 1877, et que le journal anglais *the Educational Times* de mai 1878 annonçait à ses lecteurs la mort du révérend James Booth. Nous tenons à ne faire ici que traduire cet article, en conservant toute la concision des démonstrations de l'auteur; c'est pour cela que nous avons mis son nom en tête de l'article. A. M.

SUR LES CERCLES INSCRITS, EX-INSCRITS, ET CIRCONSCRITS A UN TRIANGLE.

1. Lorsqu'un triangle est donné, on peut trouver seize cercles liés à ce triangle, savoir : un cercle circonscrit, un cercle inscrit, trois cercles touchant chacun un côté et les deux autres côtés prolongés; six passant par les centres des cercles tangents et les sommets du triangle pris deux à deux; quatre par les centres des cercles inscrits et ex-inscrits, pris trois à trois; enfin un seizième cercle passant par les pieds des hauteurs; on peut l'appeler le *cercle orthocentrique*, il est circonscrit à un triangle que l'on appelle

orthocentrique (*). Il est aussi connu sous le nom de *cercle des neuf points*. Les autres cercles sont désignés par leurs définitions. Les quatre cercles tangents aux côtés peuvent se nommer *cercles de contact*, et leurs centres sont les *centres de contact*.

Soient r, r', r'', r''' les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits, R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; les centres de ces cercles seront désignés par ω, Ω, Ω', Ω'', O; soit H le centre du cercle inscrit dans le triangle orthocentrique, et ρ son rayon. Le cercle inscrit touche les côtés du triangle aux points B', A', F, et le cercle ex-inscrit touche les mêmes côtés aux points G, M, F', et comme BG = BF' et AM = AF', on a, en appelant a, b, c les côtés du triangle opposés aux angles A, B, C, BG + AM = BA = c. Par suite CG + CM est égal au périmètre du triangle et comme CG = CM, CG ou CM est égal au demi-périmètre du triangle; désignons par p ce demi-périmètre. Comme CA' = CB', on a GA' = MB', et puisque GA' = BF' + BF; et MB' = AF + AF', on en déduit BF' + BF = AF' + AF; d'où BF = AF'; donc BA = GA' = MB' = c. Par suite



$$BG = p - a;\ MA = p - b;\ CA' = p - c.$$

Soit Δ l'aire du triangle, on a les formules connues

$$\Delta = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R}. \quad (1)$$

(*) L'auteur a précédemment défini le *triangle orthocentrique* le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs; le point de concours des hauteurs a été appelé par lui *orthocentre*.

On a aussi :

$$r' = \frac{pr}{p-a}; \quad r'' = \frac{pr}{p-b}; \quad r''' = \frac{pr}{p-c}. \qquad (2)$$

par suite $rr'r''r''' = \dfrac{p^4r^4}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \Delta^2$ (3)

Prenant les inverses de (2) on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}; \qquad (4)$$

d'où $$r = \frac{r'r''r'''}{r'r'' + r'r''' + r''r'''} \qquad (5)$$

Mais comme $rr'r''r''' = \Delta^2$, et $pr = \Delta$; on a

$$p^2 = r'r'' + r'r''' + r''r''' \qquad (6)$$

Puisque $p - a = \dfrac{pr}{r'}$; $p - b = \dfrac{pr}{r''}$,

on a $2p - a - b = c = pr\left(\dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{r''}\right) = \dfrac{prr'''(r' + r'')}{r'r''r'''}$

mais $$r'r''r''' = p^2r;$$

donc $$c = \frac{r'''(r' + r'')}{p}$$

et de même $$a = \frac{r'(r'' + r''')}{p}; \; b = \frac{r''(r' + r''')}{p} \qquad (7)$$

et puisque $4R = \dfrac{abc}{pr}$, en substituant les valeurs précédentes de a, b, c, on a

$$4R = \frac{r'r''r'''(r'' + r''')(r''' + r')(r' + r'')}{p^2r(r''r''' + r'''r' + r'r'')} \qquad (8)$$

Mais, d'après la formule (6), on a $r'r''r''' = p^2r$;

donc $$4R = \frac{(r' + r'')(r'' + r''')(r''' + r')}{r'r'' + r''r''' + r'''r'} \qquad (9)$$

Maintenant, si l'on développe le numérateur et que l'on ajoute au premier membre r, et au second la quantité égale donnée par la formule (5), on a, tous calculs faits

$$4R + r = r' + r'' + r'''. \qquad (10)$$

Ainsi : *La somme des rayons des cercles ex-inscrits est égale à la somme du rayon du cercle inscrit et de quatre fois le rayon du cercle circonscrit.*

Puisque $p - a = \dfrac{pr}{r'}$ et $p - b = \dfrac{pr}{r''}$,

on a $$(p-a)(p-b)=\frac{p^2r^2}{r'r''},$$

ou $$p^2-(a+b)p+ab=\frac{p^2r^2r'''}{r'r''r'''}.$$

En prenant les expressions analogues pour les autres côtés, et ajoutant, on a

$$3p^2-4p^2+ab+ac+bc=\frac{p^2r^2(r'+r''+r''')}{r'r''r'''}$$

mais $$p^2r=r'r''r''';$$

par suite $$ab+ac+bc=p^2+r(r'+r''+'''r);$$

comme $$r'+r''+r'''=4R+r,$$

on a $$bc+ac+ab=p^2+4Rr+r^2 \qquad (11)$$

et par suite $$a^2+b^2+c^2=2p^2-8Rr-2r^2 \qquad (12)$$

Ces théorèmes pourraient être établis plus simplement en éliminant successivement $bc+ac+ab$ et $a^2+b^2+c^2$ entre $2p=a+b+c$ et $pr^2=(p-a)(p-b)(p-c)$.

2. Puisque $\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=\frac{1}{r}$ (voir la formule 4) on a, en élevant au carré,

$$\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}+\frac{1}{r'''^2}=\frac{1}{r^2}-2\left(\frac{1}{r'r''}+\frac{1}{r'r'''}+\frac{1}{r''r'''}\right)$$

ou $$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}+\frac{1}{r'''^2}=\frac{2}{r^2}-\frac{2(r'+r''+r''')r}{r'r''r'''}$$

mais $$r'+r''+r'''=4R+r,$$

et $$rr'r''r'''=p^2r^2$$

donc $$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}+\frac{1}{r'''^2}=\frac{2p^2-8Rr-2r^2}{p^2r^2} \qquad (13)$$

Mais, en vertu de la formule (12) on a

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-8Rr-2r^2.$$

Par suite $$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{1}{r''^2}+\frac{1}{r'''^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2} \qquad (14)$$

Donc : *La somme des inverses des carrés des rayons des quatre cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle est égale à la somme des carrés des côtés du triangle, divisée par le carré de la surface de ce triangle.*

3. Soient h', h'', h''' les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle sur le côté opposé, alors ah', bh'',

ch''' sont égaux chacun à $2pr$, et comme on a $\frac{1}{r'} = \frac{p-a}{pr}$; $\frac{1}{r''} = \frac{p-b}{pr}$ on a aussi

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = \frac{c}{pr} = \frac{2c}{h'''c}, \text{ d'où } h'''\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) = 2;$$

de la même manière, on aura

$$h'\left(\frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}\right) = 2, \text{ et } h''\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'''}\right) = 2.$$

Par suite $\frac{h' + h''}{r'''} + \frac{h'' + h'''}{r'} + \frac{h''' + h'}{r''} = 6.$ (15)

4. *La somme des carrés des côtés d'un triangle est égale au double de la somme des produits de chaque hauteur par la distance comprise entre le sommet correspondant et l'orthocentre.*

Soit h' la hauteur correspondant à l'angle A; la distance du sommet A à l'orthocentre est $2R\cos A$ et son produit par h' est $2Rh'\cos A = 4\Delta R\,\frac{\cos A}{a}$,

en appelant Δ la surface du triangle. On peut écrire cette expression $2\Delta R\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$.

En prenant les expressions analogues pour les autres angles, et remarquant que l'on a

$$abc = 4\Delta R,$$

il vient

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2R\,(h'\cos A + h''\cos B + h'''\cos C).$$

5. Dans un triangle plan, on a la relation

$$\frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{2p} = \frac{r}{R}. \qquad (16)$$

Car si l'on désigne par q', q'', q''' les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés du triangle a, b, c, on a

$$\cos A = \frac{q'}{R};\ \cos B = \frac{q''}{R};\ \cos C = \frac{q'''}{R}. \qquad (17)$$

Par suite

$$\frac{aq' + bq'' + cq'''}{2pR} = \frac{2\Delta}{2pR} = \frac{\Delta r}{Rpr} = \frac{r}{R}. \qquad (18)$$

La somme des rapports de chacune des distances du centre à un côté à la hauteur correspondante à ce côté est égale à l'unité.

Car on a

$$\frac{q'}{h'} = \frac{\text{surf COB}}{\text{surf CAB}}. \text{ Donc } \frac{q'}{h'} + \frac{q''}{h''} + \frac{q'''}{h'''} = 1. \quad (19)$$

La somme des inverses des hauteurs est égale à l'inverse du rayon du cercle inscrit.

Car on a, en appelant ω le centre de ce cercle

$$\frac{r}{h'} = \frac{\text{surf B}\omega\text{C}}{\text{surf BAC}}.$$

En cherchant les expressions analogues pour les autres termes, et ajoutant, il vient

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} = \frac{1}{r}. \quad (20)$$

Si l'on revient à la figure, on voit facilement que l'on a

$$\frac{\Omega\omega}{C\omega} + \frac{\Omega'\omega}{B\omega} + \frac{\Omega''\omega}{A\omega} = 2.$$

car $$\frac{\Omega\omega}{C\omega} = \frac{GA'}{GC} = \frac{c}{p};$$

de même $$\frac{\Omega'\omega}{B\omega} = \frac{b}{p}; \quad \frac{\Omega''\omega}{A\omega} = \frac{c}{p}.$$

La somme de ces rapports est égale évidemment à 2.

(*A suivre*).

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1879

Composition mathématique (*Durée*, 3 heures).

PREMIÈRE QUESTION. — *Calculer les angles x, compris entre 0° et 180° donnés par la formule*

$$\text{tg } 2x = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha},$$

dans laquelle on fait

$$a = 4627^m, 55; \quad b = 3994^m, 68$$
$$\alpha = 51°57'44''; \quad \beta = 63°18'27''.$$

Solution. — On divise par $a \sin \beta$ les deux termes du second membre et on pose

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

La formule devient alors

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} (45 - \varphi)$$

d'où l'on tire $\quad 2x = K\pi + (45 - \varphi)$

et par suite $\quad x = \frac{K\pi}{2} + \frac{(45 - \varphi)}{2}.$

Comme, d'après les données $45 - \varphi$ est positif, il y a deux angles répondant à la question, données en faisant $K = 0$ et $K = 1$,

on trouve $\quad \varphi = 36^\circ 55' 14'', 47$

d'où $\quad 45 - \varphi = 8^\circ 4' 35'', 53$

et $\quad x_1 = 4^\circ 2' 17'', 72 \qquad x_2 = 94^\circ 2' 17''72.$

2e Question. — *Un cylindre et un cône droits à bases circulaires ont les hauteurs égales, les surfaces totales égales et les volumes égaux; la hauteur est donnée, et l'on demande de calculer le rayon des bases.*

Appelons h la hauteur commune, x le rayon de base du cylindre, y celui du cône, z l'arête de ce dernier. On a les équations

$$z^2 = h^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$\pi z y + \pi y^2 = 2\pi x (h + x) \qquad (2)$$

$$\frac{1}{3} \pi y^2 h = \pi x^2 h \qquad (3)$$

La troisième donne immédiatement, puisque x, y et z sont positifs $\quad y = x\sqrt{3}.$

Portons cette valeur dans la seconde et divisons par x, ce qui supprime la solution inadmissible $x = 0$, il vient, après avoir divisé par π : $z\sqrt{3} + x = 2h$;

la seconde équation donne:

$$z^2 - 3x^2 = h^2$$

En éliminant x, on trouve l'équation

$$8z^2 - 12hz\sqrt{3} + 13h^2 = 0,$$

qui donne pour z les deux valeurs

$$z = h\left(\frac{3\sqrt{3} \pm 1}{4}\right)$$

Il faut que z soit positif et plus grand que h, pour que l'on trouve pour x et y des valeurs acceptables. Or, la première valeur $z' = h \cdot \frac{3\sqrt{3}+1}{4}$ satisfait évidemment à ces deux conditions. La seconde y satisfait aussi ; car elle est d'abord évidemment positive, et de plus on a

$$3\sqrt{3} - 1 > 4,$$

Car cette condition revient à $3\sqrt{3} > 5$, ou $27 > 25$, ce qui est vrai.

On tire facilement de là les valeurs de y, et par suite de x; on trouve par exemple

$$y'^2 = z'^2 - h^2 = \frac{h^2}{16}(12 + 6\sqrt{3})$$

et $$y''^2 = \frac{h^2}{16}\left(12 - 6\sqrt{3}\right)$$

En extrayant les racines et dédoublant les radicaux, on trouve $$y = \frac{h}{4}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)$$

et $$x = \frac{h}{4}\left(\sqrt{3} \pm 1\right)$$

En portant ces valeurs dans la seconde équation, on trouve que la valeur correspondant à y''^2 convient seule au problème.

3e Question. — *Dans un triangle* ABC, *on donne les deux côtés* AB *et* AC, *et l'on sait que la base* BC *est égale à la hauteur correspondante* AD. *On demande de calculer l'angle* A. — *Discussion.*

On a d'abord $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

puis on a en égalant deux expressions de la surface

$$bc \sin A = a^2$$

Donc, l'angle A est donné par l'équation très-simple

$$bc(\sin A + 2 \cos A) = b^2 + c^2$$

ou $$\sin A + 2 \cos A = \frac{b^2 + c^2}{bc}.$$

En posant $\operatorname{tg} \varphi = 2$, on trouve

$$\sin(\varphi + A) = \frac{b^2 + c^2}{bc} . \cos \varphi.$$

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que le carré du second membre soit inférieur à 1, ce qui donne

$$\left(\frac{b^2 + c^2}{bc}\right)^2 < 5,$$

ou $$(b^2 - c^2)^2 < b^2c^2$$

ou enfin $$b^2 - c^2 < bc$$

Car je puis toujours supposer que b est le plus grand côté donné, et par suite que, après l'extraction de la racine carrée, les deux membres sont positifs. Lorsque cette condition sera remplie, je pose

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} \cos \varphi = \sin \lambda$$

et j'ai alors $$\varphi + A = \lambda$$

ou $$\varphi + A = \pi - \lambda.$$

Je prendrai celle de ces deux formules qui me donnera pour A un angle positif et moindre que 180°; car ici, l'angle A devant être l'angle d'un triangle, on doit faire, dans la formule générale, $K = 0$.

Si l'on a $$b^2 - c^2 = bc$$

on en tirera $$\lambda = 90°,$$

et par suite comme on a

$$\varphi = 63° \; 26' \; 5'', 82,$$

on en tire $$A = 26° \; 33' \; 54'', 18.$$

A. M.

qu'une zone dans l'ombre portée sera d'autant plus noire qu'elle eût été plus claire si elle n'eût pas été dans l'ombre.

Si donc certains cônes ou cylindres étaient dans l'ombre portée, la zone $+7$ devrait être la plus noire; viendraient ensuite les zones $+7$, $+6$, $+5$, etc.

On devrait donc, dans ce cas, passer une première teinte noire, plus noire que la teinte d'ébauche, sur la zone 7. Une deuxième teinte s'étendant jusqu'à la ligne $+6$ et recouvrant les zones $+7$ et $+6$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la ligne n° 0.

On remarquera que ces teintes doivent être plus intenses que les précédentes pour plusieurs raisons : 1° il faut qu'elles détruisent l'effet de dégradation produit par les précédentes et en sens inverse de celui que l'on veut maintenant obtenir; 2° il faut qu'elles produisent une nouvelle dégradation; 3° elles s'appliquent sur une région fortement teintée déjà et, comme on l'a vu plus haut, leur effet relatif en est diminué.

Pratique du lavis. — Pratiquement, on opérera ainsi : avec le gros pinceau servant de jauge, on mesurera dans le godet 6 forts pinceaux d'eau pure. Dans cette eau, on délayera l'encre de Chine de manière à donner naissance à une teinte $t = \frac{2}{3}$ environ. Ce sera la teinte d'ébauche n° 0 que l'on passera sur tout ce qui est dans l'ombre propre ou portée, indistinctement. Cela fait, on y ajoutera un pinceau d'eau, ce qui donnera la teinte n° 1 passée des lignes $+1$ à $\overline{1}$. On ajoutera à cette teinte deux pinceaux d'eau, ce qui donnera la teinte 2, passée de $+\overline{2}$ à $\overline{2}$. — On y ajoutera trois pinceaux d'eau ce qui donnera la teinte $+3$ et ainsi de suite.

Ombres portées. — On fera dans 6 pinceaux d'eau une teinte $t = 1/2$, c'est-à-dire plus forte que la teinte d'ébauche et on la passera sur les zones qui sont dans l'ombre portée et qui eussent été les plus claires sans l'existence de cette ombre. — On y ajoutera un pinceau d'eau et on la

passera à cheval sur la précédente en avançant d'une ligne de part et d'autre, et ainsi de suite jusqu'à venir se souder sur la ligne d'ombre propre n° 0.

(*A suivre.*)

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

Note du traducteur. — En publiant cette note, nous avons pour but de rappeler un certain nombre de formules connues de nos lecteurs, et en même temps de leur donner sur le triangle des formules nouvelles, que le Rev. James Booth a publiées dans un ouvrage qu'il a eu bien juste le temps de terminer, puisque la préface du second volume est datée du premier jour de l'an 1877, et que le journal anglais *the Educational Times* de mai 1878 annonçait à ses lecteurs la mort du révérend James Booth. Nous tenons à ne faire ici que traduire cet article, en conservant toute la concision des démonstrations de l'auteur; c'est pour cela que nous avons mis son nom en tête de l'article. A. M.

SUR LES CERCLES INSCRITS, EX-INSCRITS, ET CIRCONSCRITS A UN TRIANGLE.

1. Lorsqu'un triangle est donné, on peut trouver seize cercles liés à ce triangle, savoir : un cercle circonscrit, un cercle inscrit, trois cercles touchant chacun un côté et les deux autres côtés prolongés; six passant par les centres des cercles tangents et les sommets du triangle pris deux à deux; quatre par les centres des cercles inscrits et ex-inscrits, pris trois à trois; enfin un seizième cercle passant par les pieds des hauteurs; on peut l'appeler le *cercle orthocentrique*, il est circonscrit à un triangle que l'on appelle

des tangentes parallèles à la direction donnée. Chacune de ces tangentes et la génératrice du cône passant par le point de contact détermineront un des plans tangents cherchés. On peut aussi se proposer de déterminer immédiatement les traces de ce plan, et c'est cette construction que nous allons indiquer ici. Pour cela, remarquons que la trace horizontale du cône est une ellipse dont le grand axe est sur la ligne *so*, les sommets étant les traces des génératrices de front, et le foyer s'obtenant très-facilement en cherchant l'intersection de S'K' avec la ligne de terre, menant la bissectrice de l'angle ainsi formé, et projetant sur *so* l'intersection de cette bissectrice avec *s'o'*. On aura donc facilement l'autre foyer, et si l'on remarque que le plan tangent contient la parallèle à l'intersection des deux plans menée par le point (*s*, *s'*), et que par suite sa trace passe par la trace de cette droite, on verra que la détermination de la trace horizontale du plan tangent revient à la détermination de la tangente menée par un point à une ellipse connue par ses foyers et son grand axe. C'est de cette manière que nous avons, sur l'épure, déterminé les traces des plans cherchés, que nous traçons en trait plein, en supposant que le cône est limité à sa base sur le plan $Q\beta a'$.

(Sur l'épure, nous n'avons tracé qu'un seul des plans tangents, pour ne pas compliquer la figure.)

A. M.

CONCOURS ACADÉMIQUES DE 1879.

ACADÉMIE DE CAEN.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés une circonférence de rayon R et un point fixe O de cette circonférence, on imagine que deux points A et B se meuvent sur cette courbe à partir du point O dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre de telle façon que l'on ait

$$\text{arc } OA = K \text{ arc } OB,$$

et l'on propose: 1° de trouver et d'étudier la courbe lieu géométrique des

foyers des paraboles qui sont tangentes à la circonférence en O, passent par le point A et ont leurs axes parallèles à OB; 2° de déterminer le quatrième point commun à la circonférence et à l'une de ces paraboles et de considérer à part le cas où l'on a K = 2.

Mathématiques élémentaires.

— On donne dans un plan vertical un cercle dont le centre est en O et un point A extérieur au cercle. Soit M un point de la circonférence, déterminer l'angle AOM de manière qu'un point pesant partant de A sans vitesse initiale et suivant AM arrive en M, dans un temps donné. Calculer la tangente de AOM lorsque le temps de la chute est maximum ou minimum et prouver qu'alors le cercle qui touche, au point A, l'horizontale AH du plan et qui passe en M est tangent au cercle donné. On admet sans démonstration que pour les différentes positions de AM le carré du temps de la chute est proportionnel à $\frac{AM}{\sin HAM}$

— On donne dans un plan la position du sommet C d'un triangle dont les côtés sont connus. Déterminer géométriquement la position des deux autres sommets A et B de manière qu'en les joignant respectivement à deux points P et Q donnés dans le plan, les droites AP et BQ soient rectangulaires.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 131.

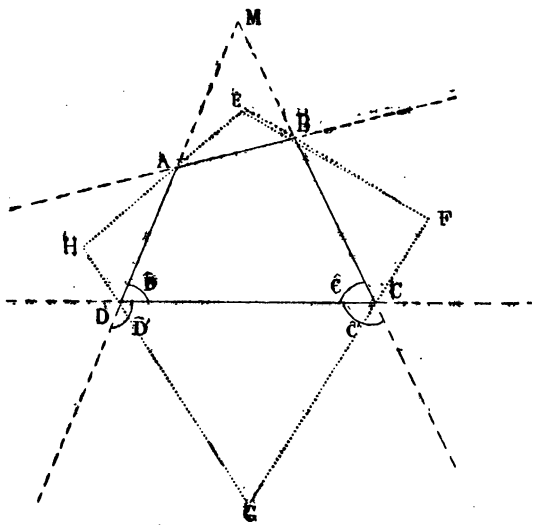
Solution par M. Deslais, élève du Lycée du Mans.

Si dans un quadrilatère quelconque on considère les quatre cercles tangents à un côté et au prolongement des deux côtés adjacents, les centres de ces cercles sont sur une même circonférence.

Considérons les quatre cercles E, F, G, H tangents chacun à un côté du quadrilatère ABCD et au prolongement des deux côtés adjacents. Les centres de ces cercles se trouvent au point de rencontre des bissectrices des suppléments de deux angles consécutifs du quadrilatère.

Mais ces centres se trouvent aussi deux à deux situés sur la bissectrice du même angle; ainsi les centres E et F se trouvent sur la bissectrice du même angle ABM. Par suite les lignes des centres passeront par les sommets du quadrilatère. Il suffit maintenant de démontrer que le quadrilatère formé par ces lignes des centres est inscriptible.

Pour cela, menons les bissectrices des angles du quadrilatère ABCD. Ces bissectrices forment un petit quadrilatère *mnpq* dont les angles opposés sont supplémentaires. On a également deux autres quadrilatères *p*DHA, *q*BFC qui



sont aussi inscriptibles, car les lignes *p*D et HD étant bissectrices de deux angles adjacents sont perpendiculaires l'une sur l'autre; il en est de même des droites *p*A et HA.

Par conséquent $H + p = 2$ droits et $F + q = 2$ droits. Comme $q + p = 2$ droits, il en résulte que $F + H = 2$ droits. Le quadrilatère EFGH ayant ses angles opposés supplémentaires est inscriptible.

Nota. — Ont résolu la même question :

MM. Johannet, à Châteauroux; Dupuy, à Grenoble; Plait, Paulme, à Passy; Bucheron, Objois, à Moulins; Marchand, à Loudun; Aillieret, à Versailles; Mirman, lycée Fontanes; Tessier, à Angers; Peyrabon, à Châteauroux; Etchats, Darodes, à Mont-de-Marsan; Vermand, à Saint-Quentin; Gélinet, à Orléans; Charaire à Bourg; Bompard, collége Stanislas; d'Ocagne, collége Chaptal.

QUESTION 134.

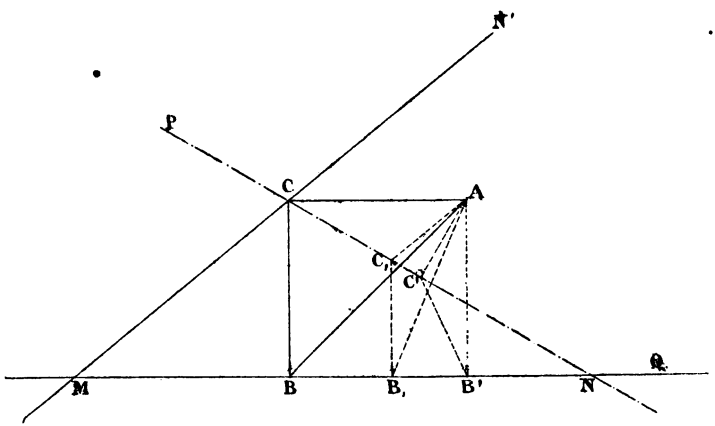
Solution par M. Chalons, élève du Lycée d'Angoulême.

Construire un triangle semblable à un triangle donné, ayant un de ses sommets en un point donné, et les deux autres sur deux droites données.

Pour résoudre ce problème, nous établirons d'abord le théorème suivant qui peut servir à la résolution de toutes les questions de ce genre.

Théorème. — Si un triangle AB_1C_1 tourne dans son plan autour de son sommet A supposé fixe et reste semblable à un triangle donné, tandis que son sommet B_1 parcourt une ligne droite donnée MN, le lieu géométrique décrit par son 3me sommet C_1 est une ligne droite.

Du point fixe A j'abaisse une perpendiculaire sur MN soit AB'; sur cette droite je construis un triangle AB'C' semblable au triangle donné. C'est un point du lieu, ainsi



que C_1 sommet de AB_1C_1 qui satisfait aux conditions énoncées. Les angles B_1AC_1, B'AC' sont égaux par construction; si on retranche de chacun d'eux B_1AC' les restes B_1AB', C_1AC' sont égaux. Par suite, les triangles AB_1B', AC_1C' ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, ils sont

donc semblables et par suite équiangles. Donc $AC'C_1 = B_1B'A = 1^d$.

Le lieu est donc la perpendiculaire menée sur AC′ en C′. Il est d'ailleurs à remarquer qu'il y aura 12 droites parallèles 2 à 2 qui composeront le lieu.

Cela posé, pour résoudre le problème donné il suffira de construire la droite PQ comme nous l'avons indiqué. Le point C où elle rencontre la droite donnée MN′ est le second sommet du triangle demandé. Il suffira alors de faire avec AC un angle CAB = C′AB′. On aura ainsi le 3e sommet.

Remarque. — Le théorème précédent permet encore de construire un triangle semblable à un triangle donné qui ait ses sommets sur 3 parallèles données, ou bien encore sur 3 circonférences données; il n'y a qu'à exécuter la même construction.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gelinet, d'Orléans; Sery, de Pau; Zuloaga, à Liége; Dupuy, à Grenoble; Deslais, au Mans.

QUESTIONS PROPOSÉES

168. — Étant donné un trapèze isocèle, trouver par la géométrie une relation entre sa hauteur, sa surface, le rayon du cercle circonscrit et l'un des côtés non parallèles.

169. — Dans un quadrilatère ABCD, la ligne EF, qui joint les milieux des diagonales, coupe en H le côté BC. Démontrer que le triangle AHD est équivalent à la moitié du quadrilatère. (*Barrieu.*)

170. — Déterminer le rayon de la sphère à laquelle appartient une calotte sphérique de surface constante, de manière que le volume du segment à une base limité par cette calotte soit maximum. hémisphère

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 9616-9.

SUR UNE LIMITE DE L'ERREUR

QUE L'ON COMMET EN REMPLAÇANT LA LONGUEUR D'UNE CIRCONFÉRENCE OU LE PÉRIMÈTRE D'UN POLYGONE RÉGULIER CIRCONSCRIT PAR CELUI DU POLYGONE INSCRIT SEMBLABLE AU PREMIER

Par M. Lionnet, ancien examinateur d'admission à l'École Navale.

I. **Théorème.** — *L'excès de la circonférence sur le périmètre d'un polygone régulier inscrit est moindre que le côté du polygone.*

Si l'on prend le rayon pour unité et qu'on désigne par n le nombre des côtés du polygone, la longueur de son côté aura pour mesure $2 \sin \frac{\pi}{n}$, et il s'agira de démontrer l'inégalité

$$2\pi - 2n \sin \frac{\pi}{n} < 2 \sin \frac{\pi}{n} \text{ ou } \frac{\pi}{n+1} < \sin \frac{\pi}{n},$$

ou enfin

$$\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1} = \frac{\pi}{n(n+1)} > \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n}.$$

Or on a $\frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi^3}{6n^3}$, ce qui nous ramène à démontrer la relation

$$\frac{\pi^3}{6n^3} < \frac{\pi}{n(n+1)}$$

ou

$$\pi^2 < \frac{6n^2}{n+1} = \frac{6n}{1 + \frac{1}{n}}. \qquad (1)$$

Or l'inégalité $\pi < \frac{22}{7}$ donne $\pi^2 < \frac{484}{49} < 10$, tandis que le second membre de (1) est supérieur à 13 pour $n = 3$ et augmente avec n; donc le théorème est démontré.

Remarque. — Nous allons donner une démonstration géométrique du même théorème.

II. **Théorème.** — *La différence des périmètres* p *et* P *de deux polygones réguliers, d'un même nombre* n *de côtés supérieur à* 5, *l'un inscrit, et l'autre circonscrit à une même circonférence, est moindre que le côté du polygone inscrit* (*).

Soit CD un côté de P tangent à l'arc AMC en son milieu M et divisé par ce point en deux parties égales. Il s'agit de prouver que, pour $n > 5$, on a

$$CD \,.\, n - AB \,.\, n < AB \quad \text{ou} \quad CD - AB < \frac{AB}{n}$$

ou enfin

$$CA < \frac{1}{n}, \tag{1}$$

en remplaçant CD, AB par les rayons OC, OA qui leur sont proportionnels et prenant OA pour unité ; mais la tangente CM, égale à $\frac{P}{2n}$, étant moyenne proportionnelle entre la sécante entière CA + 2 et le segment CA, on a

$$\frac{P^2}{4n^2} = (CA + 2)\, CA.$$

Remplaçant CA par $\frac{1}{n}$ et multipliant les deux membres par n^2, il vient

$$\left(\frac{P}{2}\right)^2 < 2n + 1. \tag{2}$$

Cette inégalité, équivalente à (1), devenant $12 < 13$ pour $n = 6$, est vérifiée par cette valeur de n. Elle l'est aussi par $n > 6$, puisque, n augmentant, P diminue et $2n + 1$ augmente; donc le théorème est démontré.

Remarque. — Pour $n < 6$, le premier membre de (2) est supérieur à 12, tandis que le second est égal ou inférieur à 11; donc alors l'inégalité a lieu en sens contraire, ce qui justifie la restriction $n > 5$ dans l'énoncé du théorème.

Corollaire. — *L'excès de la circonférence sur le périmètre d'un polygone régulier inscrit est moindre que le côté du polygone.*

L'inégalité

$$2\pi - AB \,.\, n < AB \quad \text{ou} \quad 2\pi < AB\,(n + 1)$$

qu'il s'agit de démontrer est, pour $n > 5$, une conséquence

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

immédiate du théorème (2); car on a évidemment $2\pi - p < P - p$. On la vérifie d'ailleurs très-facilement pour $n < 6$, en observant (1) qu'on a $\pi^2 < 10$ et que les valeurs de AB correspondant aux valeurs 3, 4, 5 de n sont respectivement

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

III. **Théorème.** — *On peut inscrire et circonscrire à un même cercle deux polygones réguliers d'un assez grand nombre* n *de côtés pour que la différence* d_n *de leurs périmètres soit moindre qu'une partie aliquote du côté* a_n *du polygone inscrit, aussi petite qu'on voudra.*

On sait qu'on a $d_{2n} < \frac{1}{4} d_n, \quad a_n < 2a_{2n}, \quad d_6 < a_6.$

Il en résulte $d_{12} < \frac{1}{4} d_6 < \frac{1}{4} a_6 < \frac{1}{2} a_{12}.$

On trouve pareillement

$$d_{24} < \frac{1}{4} d_{12} < \frac{1}{8} a_{12} < \frac{1}{4} a_{24};$$

et ainsi de suite; donc on a généralement

$$d_{6.2^k} < \frac{1}{2^k} a_{6.2^k} \text{ ou } d_n < \frac{1}{2^k} a_n,$$

en posant $6.2^k = n$. Le nombre entier k pouvant être supposé aussi grand qu'on voudra, le théorème est démontré.

Corollaire. — *On peut inscrire à un cercle un polygone régulier d'un assez grand nombre de côtés pour que l'excès de la circonférence sur le périmètre du polygone soit moindre qu'une partie aliquote de son côté, aussi petite qu'on voudra.* Car on a évidemment $2\pi - p < P - p$.

Remarque. — Dans la démonstration analytique du théorème (1) nous avons supposé la relation $a - \sin a < \frac{a^3}{6}$ démontrée (*Eléments de Trigonométrie rectiligne et sphérique*, p. 178) au moyen de la formule $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$. En voici une autre démonstration, déduite de la formule plus simple $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

IV. **Théorème.** — *L'erreur que l'on commet en remplaçant un arc positif quelconque par son sinus est moindre que le sixième du cube de l'arc.*

Si dans la formule $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ on remplace $\cos \frac{a}{2}$ par $1 - 2 \sin^2 \frac{a}{4}$, on aura

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} - 4 \sin \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{4}.$$

Or on a $\sin \frac{a}{2} < \frac{a}{2}$, $\sin \frac{a}{4} < \frac{a}{4}$, $\sin^2 \frac{a}{4} < \frac{a^2}{16}$ et, par suite, $4 \sin \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{4} < \frac{a^3}{8}$; donc il vient

$$\sin a > 2 \sin \frac{a}{2} - \frac{a^3}{8}. \qquad (1)$$

Remplaçant a par $\frac{a}{2}$ dans cette inégalité, dans celle qui en résulte, et ainsi de suite, on a successivement

$$\sin \frac{a}{2} > 2 \sin \frac{a}{2^2} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^3} \qquad (2)$$

$$\sin \frac{a}{2} > 2 \sin \frac{a}{2^3} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^6} \qquad (3)$$

.....

et, en général,

$$\sin \frac{a}{2^{n-1}} > 2 \sin \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^{3(n-1)}}. \qquad (n)$$

Multipliant les inégalités (1), (2), (3),..., (n) respectivement par $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$, faisant la somme des inégalités résultantes et supprimant les termes communs aux deux membres, il vient

$$\sin a > 2^n \sin \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right);$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a}{\sin a} > \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} - \frac{a^2}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right).$$

Cela étant, si l'on suppose que le nombre entier n croisse indéfiniment, le rapport $\sin \frac{a}{2^n} : \frac{a}{2^n}$ et la somme

$$1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}$$

auront pour limites l'unité et la fraction $\frac{4}{3}$, ce qui réduit l'inégalité précédente à

$$\frac{\sin a}{a} > 1 - \frac{a^2}{6} \quad \text{ou} \quad a - \sin a < \frac{a^3}{6}.$$

(Extrait des *Éléments de Trigonométrie rectiligne et sphérique.*)

NOTE DE GÉOMÉTRIE SUR LA NORMALE A L'ELLIPSE,

Par M. **Launoy**, maître répétiteur au Lycée de Lille.

I.

Théorème. — *Si l'on prend sur chaque vecteur d'un point* M *d'une ellipse une longueur égale au demi-grand axe, on a deux points en ligne droite avec le centre et cette droite est parallèle à la normale en* M.

En effet, soit D le point où la normale en M coupe le grand axe on sait que :

$$\frac{FD}{F'D} = \frac{FM}{F'M},$$

d'où

$$\frac{FD}{FD + F'D} = \frac{FM}{FM + F'M}$$

ou bien

$$\frac{FD}{c} = \frac{MF}{a}.$$

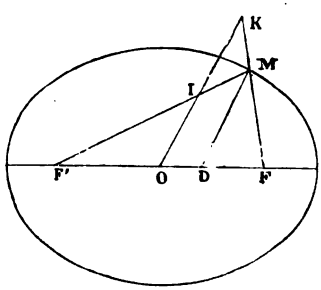


Fig. 1.

Si donc $FK = a$, les deux triangles MDF et KOF sont semblables.

De la même proportion, on tire également :

$$\frac{FD + F'D}{F'D} = \frac{FM + F'M}{F'M}$$

ou $$\frac{c}{F'D} = \frac{a}{F'M},$$

et si $F'I = a$, les triangles F'IO et F'MD sont aussi semblables; d'où la proposition énoncée.

Cette propriété conduit à la solution du problème suivant:

Étant donnée une ellipse non tracée, construire la normale: 1° en un point de la courbe; 2° parallèlement à une direction donnée.

1° Sur l'un quelconque des rayons vecteurs du point donné on prend une longueur égale au demi-grand axe; on joint le point obtenu au centre de la courbe et par le point donné on mène une parallèle à cette dernière droite;

2° Soit OK la direction donnée; les deux cercles décrits des foyers comme centres avec a pour rayons coupent OK aux points I et K; les lignes FK et F'I se coupent au point cherché M et la parallèle à OK menée par ce point sera la normale cherchée. La construction complétée au-dessous du grand axe donnerait un point M' symétrique du point M. On peut en déduire une construction de l'ellipse par points avec la normale.

II.

Théorème. — *La perpendiculaire au grand axe d'une ellipse menée par le pied d'une normale en un point* M *rencontre les lignes* FB *et* F'B *en deux points* C *et* E *tels que les longueurs* FC *et* F'E *représentent les rayons vecteurs du point* M.

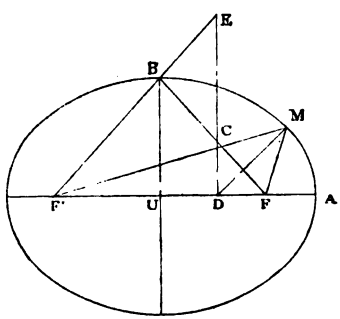


Fig. 2.

On sait que (1)

$$\frac{FM}{a} = \frac{FD}{c};$$

or, les triangles semblables CDF et BOF donnent:

$$\frac{FD}{c} = \frac{FC}{a};$$

par suite FC = FM et évidemment F'E = F'M.

D'où la solution du problème suivant : *Étant donnée une ellipse non tracée, construire la normale : 1° en un point de la courbe; 2° par un point du grand axe.*

1° M étant le point donné, les cercles décrits des foyers comme centres avec les rayons FM et F'M coupent FB, F'B en C et E, d'où la droite ECD et la normale MD ;

2° Par le point donné D on mène au grand axe la perpendiculaire DCE; les cercles de centres F et F' et de rayons respectifs FC et F'E se coupent en M; d'où la normale MD. Ils se coupent également en un point symétrique de M par rapport au grand axe, ce qui donne une seconde : normale ce qui fait, avec les deux normales qui coïncident avec le grand axe, quatre normales issues du point D.

Cette construction donne l'ellipse par points avec la normale.

Remarque. — Le point D n'a pas sur le grand axe une position quelconque; car lorsque le point C sera tel que FC < FA, au point D, ne correspondra aucun point de l'ellipse, d'après la construction précédente; la position extrême du point D sera, à partir de F, à une distance de ce point égale à :

$$\left(a - c\right) \cos \mathrm{OFB} = \left(a - c\right) \frac{c}{a}.$$

III.

Théorème. — *La normale en un point* M *d'une ellipse rencontrant le petit axe au point* P, *on a* $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PF}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$.

Il est facile de voir que le cercle circonscrit au triangle MFF' rencontre le petit axe au point P; le quadrilatère MFPF' est inscriptible dans un cercle, ce qui permet d'écrire la relation

$$\mathrm{MP} \times \mathrm{FF'} = \mathrm{MF} \times \mathrm{PF'} + \mathrm{MF'} \times \mathrm{PF};$$

or $\mathrm{PF} = \mathrm{PF'}, \quad \mathrm{FF'} = 2c, \quad \mathrm{MF} + \mathrm{MF'} = 2a,$

et par suite

$$\mathrm{MP} \times 2c = \mathrm{PF}\,(\mathrm{MF} + \mathrm{MF'}) = \mathrm{PF} \times 2a;$$

d'où la relation $\frac{\mathrm{MP}}{a} = \frac{\mathrm{PF}}{c}.$

Remarque. — *Le cercle circonscrit au triangle* MFF′ *passe par le point* T *où la tangente en* M *coupe le petit axe.*

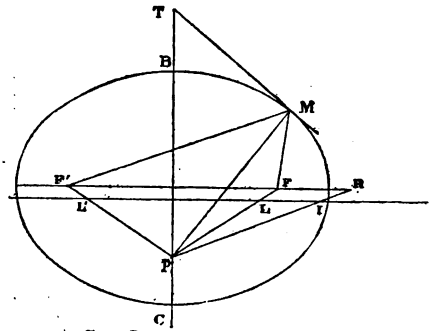


Fig. 3.

En effet, ce cercle ayant son centre sur le petit axe ne peut couper cet axe qu'en un point T tel que l'angle TMP soit droit.

Ces deux propriétés donnent la solution du problème suivant :

Mener la normale à une ellipse par un point du petit axe.

On peut considérer deux cas :

1° *L'ellipse est tracée.* — On construit le cercle circonscrit au triangle formé par les deux foyers et le point donné; ce cercle coupe l'ellipse en quatre points, et il est facile de choisir les deux points dont les normales concourent au point donné.

2° *L'ellipse n'est pas tracée.* — Soit P le point donné; on construit d'abord le cercle circonscrit au triangle PFF′; puis on joint le point P aux foyers; sur PF et PF′ on prend une longueur PL = PL′ = c; on joint L et L′. Du point P comme centre avec a pour rayon on décrit un cercle; ce cercle coupe en I et I′ la ligne LL′; les lignes PI et PI′ rencontrent le grand axe en deux points R et R′ tels que $\frac{PR}{PI} = \frac{PF}{PL}$ ou $\frac{PR}{a} = \frac{PF}{c}$

et en vertu de la propriété énoncée ci-dessus

$$PR = PM.$$

Le cercle décrit du point P comme centre avec PR pour rayon coupera le cercle circonscrit au triangle PFF′ aux points M et M′, où aboutissent les normales cherchées.

Pour le premier cas, on peut indifféremment employer l'un ou l'autre des cercles précédents.

La construction du second cas donne le point T et par suite la tangente aux deux points obtenus.

Dans les deux cas, le problème admet deux solutions, et si l'on ajoute les deux normales qui coïncident avec le petit axe, on a quatre normales issues du point P, à condition toutefois que le point P soit compris entre des limites qu'il est facile de déterminer. Pour cela, M étant un point de la courbe dont la normale est MP, soit 2α l'angle F'MF; l'angle PFF' est égal à α et

$$PF = \frac{c}{\cos \alpha};$$

par suite $$PM = \frac{a}{c} PF = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Or, on sait que $\cos \alpha$ varie entre 1 et $\frac{b}{a}$, ce qui donne, pour les valeurs extrêmes de PM, a et $\frac{a^2}{b}$.

Alors le point M est à une des extrémités des deux axes, le point P est, ou en O, ou en un point C distant de O d'une longueur égale à $\frac{a^2}{b} - b = \frac{c^2}{b}$.

On voit donc que, lorsque le point P parcourt l'espace OC, le point M parcourt la demi-ellipse ABA' et qu'à chacune des positions du point P correspondent quatre normales à la courbe. Le point P étant en C, les points M et M' des constructions précédentes se réunissent au point B et le nombre des normales se réduit à deux; le cercle décrit du point C comme centre avec CB pour rayon a trois points communs avec l'ellipse au point B; ce cercle est dit le *cercle osculateur* de l'ellipse au point B. Pour les positions du point P au delà de C, il n'existe plus que deux normales qui coïncident avec le petit axe.

Il est évident que le point P peut occuper des positions symétriques de celles que l'on vient d'examiner, par rapport au grand axe.

Remarque I. — La relation

$$PM = \frac{a}{\cos \alpha}$$

donne également une construction simple de la longueur PM; en effet, elle indique que la parallèle menée à PF par

une des extrémités, A par exemple, du grand axe, parallèle limitée aux deux axes, est précisément égale à PM; mais cette construction, simple au point de vue géométrique, est un peu moins commode que la précédente au point de vue graphique.

Remarque II. — Cette même relation indique que la projection d'une normale en un point limitée au petit axe, sur les rayons vecteurs de ce point est constante et égale au demi-grand axe.

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite;* voir page 177.)

SUR LES RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES ENTRE LES ANGLES D'UN TRIANGLE.

6. Puisque on a

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}, \text{ et } \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{p}{r'}, \quad (21)$$

en prenant les expressions analogues pour les autres angles, et ajoutant, on a

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p-a}{r} + \frac{p-b}{r} + \frac{p-c}{r} = \frac{p}{r},$$

$$\text{et } \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r'} + \frac{p}{r''} + \frac{p}{r'''}.$$

En divisant ces équations par p, on retrouve

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} \quad (22)$$

En multipliant les équations (21), on a

$$\cot g \frac{A}{2} \cot g \frac{B}{2} \cot g \frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}$$

et $$\cot g \frac{A}{2} \cot g \frac{B}{2} \cot g \frac{C}{2} = \frac{p^3}{r'r''r'''}.$$

Donc

$$\frac{p^3 r}{rr'r''r'''} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pr^3} = \frac{p^2r^2}{pr^3} = \frac{p}{r}.$$

Donc $$pr = \sqrt{rr'r''r'''}. \qquad (23)$$

Par suite : *La racine carrée du produit des quatre rayons des cercles inscrits et ex-inscrits est égale à la surface du triangle.*

On a $\sin A = \frac{a}{2R}$; $\sin B = \frac{b}{2R}$; $\sin C = \frac{c}{2R}$.

En ajoutant, on a

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}. \qquad (24)$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2}. \qquad (25)$$

Si l'on élève (24) au carré, et si l'on en retranche les valeurs des carrés des sinus, on a

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin A \sin C = \frac{4p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{8R^2}$$

mais $$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

Donc

$$\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \qquad (26)$$

On a $$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Donc

$$4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc} = \frac{r}{R}. \qquad (27)$$

On a $$1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}.$$

En prenant les mêmes expressions pour cos B et cos C, et ajoutant, on doit avoir

$$\cos A + \cos B + \cos C$$
$$= \frac{2p^2(a+b+c) - 2p(a^2+b^2+c^2) - 3abc}{abc}$$

Mais $\quad a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$

On trouve alors, en remplaçant

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}. \qquad (28)$$

Si q', q'', q''' représentent les distances du centre du cercle circonscrit aux côtés, on a

$$q' = R \cos A;\ q'' = R \cos B;\ q''' = R \cos C.$$

Par suite $\quad q' + q'' + q''' = R + r. \qquad (29)$

7. On a $\quad a \operatorname{cotg} A = 2q';$

donc $a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(q' + q'' + q'''.$

Mais $\quad q' + q' + q'' = R + r;$

donc $a \operatorname{cotg} A + b \operatorname{cotg} B + c \operatorname{cotg} C = 2(R + r). \quad (30)$

Si l'on fait le carré de l'équation (28) et que l'on remplace $\cos^2 A$ par sa valeur $1 - \frac{a^2}{4R^2}$, et que l'on prenne les expressions analogues pour $\cos^2 B$ et $\cos^2 C$, on a

$$2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A)$$
$$= \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - 3 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2};$$

en remplaçant $a^2 + b^2 + c^2$ par sa valeur, et réduisant, on a $\quad \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$

$$= \frac{r^2 + p^2 - 4R^2}{4R^2}. \qquad (31)$$

8. Pour montrer que l'on a

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C \quad (32)$$

on remarque que puisque

$$A + B + C = \pi, \text{ on a } \cos C = -\cos(A + B).$$

Donc

$$\cos^2 C = \cos^2 A \cos^2 B - 2 \cos A \cos B \sin A \sin B$$
$$+ 1 - \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A \cos^2 B,$$

en remplaçant $\sin^2 A$ et $\sin^2 B$ par leurs valeurs.

Donc l'expression $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ devient

$$1 + 2 \cos A \cos B (\cos A \cos B - \sin A \sin B)$$
$$= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

D'après une formule que nous avons vue plus haut, on a

$$1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc};$$

on en tire

$$(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C) = \frac{p^2}{2R^2}. \quad (33)$$

En effectuant, et remplaçant $\cos A + \cos B + \cos C$
et $\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$
par leur valeur (28) et (31), on trouve après réduction

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}; \quad (34)$$

on a $$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Donc

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{4p \,.\, pr}{4R \,.\, pr} = \frac{p}{R}. \quad (35)$$

En comparant avec une formule déjà donnée (24), on a

$$\sin A + \sin B + \sin C$$
$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (36)$$

9. Soient a' et a'' les segments déterminés sur le côté a par la hauteur h abaissée du sommet, et π la distance de l'orthocentre au côté a. On a

$$\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C = \frac{a'a''}{h^2} = \frac{h\pi}{h^2}.$$

Donc $$\operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C = \frac{\pi}{h} = \frac{\pi a}{ha}.$$

Appelons Δ l'aire du triangle total, δ, δ', δ'' les triangles composants, ayant leur sommet à l'orthocentre. On a

$$\pi a = 2\delta; \; ha = 2\Delta.$$

Donc

$$\operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} A = \frac{\delta + \delta' + \delta''}{\Delta} = 1.$$

Multiplions par $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$, il vient

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \quad (37)$$

puisque $$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{r}{p}\quad(38)$$

De même, comme

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{(p-b)(p-c)}{pr},$$

on en déduit

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p},\quad(39)$$

on a

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Donc $$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{p-a}{p}.$$

On en conclut

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=1.\quad(40)$$

10. Puisque $ha=2\Delta$, on en déduit $h=\frac{2\Delta}{a}$, et par suite

$$h+h'+h''=2\Delta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2\Delta\frac{bc+ac+ab}{abc}$$
$$=\frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}.\quad(41)$$

Soient a', a'' les segments que fait sur le côté a la hauteur menée du point A, et π la distance du même côté à l'orthocentre. On a

$$\cos B\cos C=\frac{a'a''}{bc}=\frac{h\pi}{bc}=\frac{2\Delta\pi}{abc},$$

la formule (31) nous donne

$$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A=\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2}$$

Donc

$$\pi+\pi'+\pi''=\frac{p^2+r^2-4R^2}{2R}.\quad(42)$$

et par suite

$$h+h'+h''-(\pi+\pi'+\pi'')=2(R+r).\quad(43)$$

Mais cette quantité représente la somme des lignes qui joignent l'orthocentre aux sommets du triangle; et comme

on sait que la somme de ces distances est double de la somme des perpendiculaires q', q'', q''', abaissées du centre sur les côtés, on retrouve ainsi la formule (29)

$$q' + q'' + q''' = R + r.$$

11. *Dans un triangle, la somme des inverses des côtés des six carrés inscrits et ex-inscrits est égale au double de l'inverse du rayon du cercle inscrit.*

Soient a la base du triangle et h sa hauteur; en appelant x le côté du carré inscrit on a $x = \frac{ah}{a+h}$; en appelant x_1 le côté du carré ex-inscrit, on a $x_1 = \frac{ah}{a-h}$.

Donc $\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} = \frac{2}{h}$; si y, y_1, et z, z_1, sont les côtés des carrés qui s'appuient sur les deux autres côtés du triangle, on aura

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z_1}$$
$$= 2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}\right) = \frac{2}{r} \quad . \; . \; . \; . \quad (44)$$

(A suivre.)

CONCOURS ACADÉMIQUES 1879

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Mathématiques élémentaires.

— Lieu des points tels que le rapport des distances à deux points fixes est égal au rapport de deux lignes données.

Quel est le lieu des points de l'espace jouissant des mêmes propriétés?

— Lieu des points tels que les distances à trois points donnés sont dans le rapport de trois lignes données. (Dans l'espace.)

Calculer toutes les lignes de la figure

$BC = 50^{mm}$ $\quad CA = 54^{mm}$ $\quad AB = 32^{mm}$

$\alpha = 30$ $\quad \beta = 24$ $\quad \gamma = 10$

— Construire un quadrilatère, connaissant trois côtés et les deux angles adjacents au quatrième côté.

— Calculer trigonométriquement les autres éléments du quadrilatère.

(6 heures.)

ACADÉMIE DE DOUAI

Mathématiques spéciales.

Par deux points fixes A, B pris sur une conique, on fait passer un cercle variable qui coupe cette conique en deux autres points C, D :

1° Démontrer que la droite qui joint les deux pôles de la sécante CD pris par rapport au cercle et à la conique passe toujours par un point fixe F, quel que soit le cercle choisi, et que la polaire du point F par rapport au cercle passe toujours aussi par un point fixe G, quel que soit le cercle;

2° Lieu des points de contact des tangentes menées du point F aux différents cercles;

3° Même question pour le point G.

Mathématiques élémentaires.

On considère toute la catégorie des triangles dans lesquels les trois côtés x, y, z satisfont à une relation donnée de la forme

$$ax^m y^n z^p + bx^{m'} y^{n'} z^{p'} + cx^{m''} y^{n''} z^{p''} + \ldots = 0$$

où a, b, c... sont des constantes de signes divers et où tous les termes sont de même degré, en sorte qu'on ait

$$m + n + p = m' + n' + p' = m'' + n'' + p'' \ldots$$

1° On demande quelle relation existe dans tous ces triangles entre les trois hauteurs h, h', h'';

2° Déduire de ce qui précède une formule propre au triangle rectangle;

3° Trouver par suite la pente d'un plan incliné en fonction des pentes de deux droites situées dans ce plan et comprises respectivement dans deux plans verticaux perpendiculaires l'un à l'autre. (On sait que la pente d'une droite est le rapport de la différence des niveaux de deux de ses points à la distance de leurs projections sur un plan horizontal et que la pente du plan est celle d'une perpendiculaire aux horizontales du plan.)

4° Démontrer que si l'on assimile les pentes de diverses droites d'un plan (émanées d'un même point) à des forces horizontales agissant dans les plans verticaux respectifs menés suivant ces droites, la pente de la ligne de plus grande pente du plan sera pour la grandeur et pour la direction la résultante des pentes de deux autres lignes comprises dans deux plans verticaux rectangulaires quelconques.

Enseignement spécial.

1° On donne un quadrilatère gauche ABCD, c'est-à-dire le quadrilatère décrit par une droite mobile MN qui s'appuyant constamment sur deux droites fixes AD, BC non situées dans un même plan, passe de la position AB à la position CD, sans cesser jamais d'être comprise dans un plan mobile MPNQ toujours parallèle à lui-même. On demande en premier lieu quelle est la forme de la section MPNQ faite par le plan mobile dans le tétraèdre ABCD; en second lieu, comment la droite MN divise cette section, et comment la surface engendrée par MN divise le volume engendré par la surface MPNQ.

2° Un corps est limité inférieurement par un quadrilatère horizontal EFGH, latéralement par quatre faces planes verticales, enfin supérieurement par un quadrilatère gauche ABCD. On demande de quelle manière précise son volume est compris entre la somme des deux troncs de prismes trian-

gulaires EFGCAB et EHGCAD et la somme des deux troncs de prismes triangulaires HEFBDA, HGFBDC.

3° Trouver l'expression du volume de ce corps et passer de là à l'expression générale du volume analogue que comprennent entre eux deux quadrilatères gauches ABCD, A'B'C'D' ayant pour projection horizontale un même quadrilatère plan EFGH.

Descriptive.

Étant données les projections de trois points A, B, C, trouver les projections d'un point D situé à une même distance donnée de chacun des trois premiers.

Données numériques : — $\alpha a = 3$ cent. 9 $\alpha a' = 3$ cent. 6,
$b\beta = 1$ cent. 5 $b'\beta = 10$ cent. 5,
$c\gamma = 9$ cent. 9 $c'\gamma = 4$ cent. 8,
$a\beta = 7$ cent. 5 $\beta\gamma = 3$ cent. 6.
DA = DB = DC = 15 centimètres.

ACADÉMIE DE LYON

Classe de mathématiques élémentaires.

Une circonférence O', de rayon donné, a son centre sur une circonférence O, qui est également déterminée. Si l'on joint l'extrémité A du diamètre OO' au point d'intersection C des deux circonférences, la ligne AC rencontrera la corde O'B en un point E par lequel on mène une tangente EG au cercle O'.

On demande :

1° Le lieu du point M, intersection de la tangente et de AB prolongé, quand le point B se meut sur la circonférence O.

2° On prouvera que les trois points D, G, B, sont en ligne droite.

Enseignement spécial.

1° En quels points de la surface d'un prisme triangulaire, oblique et homogène, peut-on suspendre par un fil ce corps, pour que, sous l'action de la pesanteur, les arêtes latérales prennent une direction d'équilibre parallèle ou perpendiculaire à celle du fil?

2° On propose de couper un parallélépipède donné parallèlement à l'une des diagonales de la base, de manière que la section soit un rectangle ou un losange; on supposera dans l'épure que les deux diagonales de la base sont dans le rapport de 3 à 4, qu'elles font entre elles un angle de 30° et que les arêtes latérales du parallélépipède font avec la base un angle de 60°

ACADÉMIE DE PARIS

Mathématiques élémentaires.

On donne deux circonférences O et O' tangentes extérieurement ou intérieurement. Par le point A, on mène dans la première une corde quelconque AB, et dans la deuxième une corde AC perpendiculaire à AB. On joint BC. Cela posé, on demande :

1° Le lieu décrit par la projection du point A sur l'hypoténuse BC lorsque le triangle variable tourne autour du point A;
2° Le lieu du milieu de l'hypoténuse BC;
3° Le lieu décrit par le centre de gravité du triangle ABC.
Examiner si tous les points de chacune des lignes trouvées conviennent dans tous les cas à la question.

— On donne une droite OA, de longueur connue a. Du point O comme centre, on décrit une sphère de rayon variable et l'on considère sur cette sphère la calotte sphérique vue du point A, et le segment à une base compris entre cette calotte et sa base. On demande quel doit être le rayon de la sphère:
1° Pour que l'aire de la calotte soit maximum;
2° Pour que le volume du segment soit maximum.

ACADÉMIE DE POITIERS

Classe de Mathématiques élémentaires.

Sur le diamètre AB d'un cercle donné on prend AC = AB et on mène en C une perpendiculaire à CAB. On joint un point quelconque P de cette perpendiculaire au point A; la droite PA rencontre la circonférence en H. La droite BH rencontre CP en Q. On mène par P une parallèle à CAB qui rencontre Q A en R, et par le point Q une parallèle à CAB qui rencontre PA en M. Démontrer :

1° Que $$PC \times CQ = \text{constante}$$
2° Que $$\frac{PA}{PM} = \frac{HA}{HM};$$
3° Que les points P, K, B sont en ligne droite;
4° Que les points M, B, R, sont en ligne droite;
5° Que la droite MK passe par un point fixe;
6° Que la droite HK passe par un point fixe;
7° Trouver les lieux géométriques des points M et R.

ACADÉMIE DE RENNES

Mathématiques élémentaires.

1re *Question.* — Montrer que, pour savoir combien de fois le nombre premier P est facteur dans le produit $1.2.3....m$ de tous les nombres jusqu'à m, on peut, après avoir écrit ce nombre m dans le système de numération dont la base est P, diviser par $p - 1$ l'excès de ce nombre m sur la somme de ses chiffres.

En conclure que p sera facteur dans le nombre

$$\frac{m(m-1)(m-2)-(m-n+1)}{1.2.3....n}$$

autant de fois que, dans la soustraction de m et de n écrits dans le système de base P, il faudra ajouter P aux chiffres du plus grand nombre pour rendre la soustraction possible dans chaque colonne.

2me *Question.* — Un triangle ABC étant donné, dont les côtés sont parcourus dans le même sens, on mène par les sommets des rayons faisant un même angle V avec le côté respectivement opposé. On détermine ainsi un triangle A'B'C' semblable au proposé. Trouver le rapport de similitude soit géométriquement, soit par le calcul et à quelles valeurs de v correspondent le plus petit, le plus grand des triangles A'B'C'? Ce triangle peut-il être égal à ABC? v variant, quel sera le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit à A'B'C', de celui du cercle inscrit et du centre de gravité

ACADÉMIE DE TOULOUSE

Mathématiques élémentaires.

Trois points OAB étant situés en ligne droite, on mène par le point O une droite variable OT, et par les points A et B, un cercle tangent à la droite OT.

Déterminer la position de la droite OT de telle manière que ce cercle ABC ait un rayon donné R.

On désire obtenir une solution géométrique, et aussi une relation algébrique entre les quantités OA, OB, R et les lignes trigonométriques de l'angle O.

On déduira de chaque méthode la discussion des résultats.

Enseignement spécial.

Première Question. — Projections horizontale et verticale d'un cube dont le côté est donné, et de position telle que l'un de ses sommets soit sur la ligne de terre, que les deux côtés aboutissant à ce sommet fassent avec la ligne de terre des angles égaux à 45°, et que l'inclinaison du plan formé par ces deux côtés sur le plan horizontal de projections soit égale à 45°.

2e Question. — Soient trois arbres parallèles A_1, A_2, A_3 : le premier arbre portant une roue dentée C_1 dont le nombre des dents est N_1. Cette roue est fixée invariablement sur cet arbre et engrène avec une petite roue O_2 dont le nombre de dents est n_2. Cette petite roue O_2 est invariablement fixée sur le second arbe A_2, arbre sur lequel on a fixé une grande roue C_2 dont le nombre de dents est N_2 n'engrenant pas avec la petite O_2. Au contraire cette grande roue C_2 engrène avec un petite roue dentée O_3 dont le nombre de dents est n_3, fixée invariablement sur le troisième arbre A_3. Cette machine étant en mouvement, dans quel rapport sont les vitesses de rotation ω_1 et ω_3 des roues extrêmes C_1 et O_3?

$$N_1 = 45 \qquad N_2 = 48$$
$$n_2 = 6$$

Quelle valeur faut-il attribuer à n_3 pour que, l'aiguille a fixée sur l'arbre A_1 marquant la minute, l'aiguille b fixée sur l'arbre A_3 marque la seconde?

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 151.)

Principe des distances. — Lorsqu'un objet s'éloigne de nous, deux effets se produisent.

1° La lumière qu'il nous envoie, et, par suite, l'éclat total qu'il possède pour nous décroît en raison inverse du carré de la distance; cet effet est absolument nul pour notre œil, et s'il existait seul, les objets paraîtraient aussi éclatants de loin que de près. En effet, plus un objet est loin, moins il nous envoie de lumière, c'est vrai, mais plus il paraît petit dans notre œil; de telle sorte que celui-ci recevant moins de lumière mais la condensant sur un espace plus petit, l'éclat par unité de surface de cet espace de la rétine reste constamment le même, et l'objet doit paraître aussi éclatant de loin que de près. Dans les pays où l'atmosphère est très-pure, en Égypte notamment, les distances ne modifient que la grandeur apparente des objets, mais presque pas l'intensité de leur coloration;

2° Lorsqu'un objet s'éloigne, il s'interpose entre lui et nous une sorte de brouillard formé par l'air; ce brouillard est d'autant plus intense que l'air est moins pur. Il agit:

a. Par réflexion, en recevant de la lumière et nous la renvoyant, ce qui diminue d'autant l'éclat relatif des objets situés derrière;

b. Par transparence, en colorant de sa couleur, qui est bleue, les objets devant lesquels il s'interpose.

Des différents plans en peinture. — En peinture, on classe les objets suivant leur distance à l'œil, par les places qu'ils occupent.

Les objets placés très-près sont dits au premier plan; on admet que sur eux l'effet de l'air est nul; donc les objets en premier plan posséderont leur couleur absolue.

Placés un peu plus loin, les objets sont dits en deuxième plan ; les objets jaunes paraîtront dans ce cas moins jaunes et un peu bleuis, ou mieux un peu neutralisés comme couleur.

Les objets rouges paraîtront moins rouges et un peu bleuis, c'est-à-dire un peu violets.

Les objets bleus paraîtront moins bleus s'ils sont bleu foncé et, au contraire, un peu plus bleus s'ils sont bleu très-clair.

Encore plus loin, les objets sont en troisième plan ; tous les effets indiqués ci-dessus devront être accentués.

Enfin, tout à fait au loin, les objets sont dits dans le lointain ; la couleur bleue augmente, et l'on peut dire que toutes les couleurs viennent se fondre dans le bleu.

Le jaune devient bleu jaune, c'est-à-dire un peu verdâtre.

Le rouge devient rouge bleu, c'est-à-dire un peu violacé.

Le bleu devient moins foncé s'il était d'abord foncé, et plus foncé au contraire s'il était très-clair ; en tout cas, jamais ce bleu de lointain ne peut devenir intense ; il ne doit évidemment pas dépasser le bleu de ciel qui est le bleu clair à son maximum de densité.

Manière de rendre en camaïeu, à l'encre de Chine, les effets de la distance. — Les effets de distance se rendront à l'encre de Chine de manières différentes suivant l'intensité des tons. En effet, un objet est-il foncé ? En s'éloignant, il doit : 1° perdre de sa coloration, c'est-à-dire s'éclaircir ; 2° prendre le ton de l'air, c'est-à-dire se foncer.

Suivant que l'un ou l'autre de ces deux effets l'emportera, on devra diminuer ou augmenter la teinte du premier plan.

Exemples :

1° Un objet jaune en lumière se rendra en premier plan par une teinte d'encre de Chine pour ainsi dire nulle ; s'il s'éloigne, c'est l'effet d'assombrissement de l'air qui l'emportera ; on rendra l'éloignement en ajoutant de légères teintes d'encre de Chine qui, cependant, ne devront jamais, même pour les lointains, dépasser la teinte que l'on jugera devoir représenter le bleu de ciel ;

2° Un objet jaune dans l'ombre, et, plus généralement, tout objet dans l'ombre se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine en général assez intense; en éloignant l'objet, c'est l'effet d'éclaircissement qui l'emportera et on devra diminuer les teintes;

3° Pour un objet rouge en lumière, le rouge étant un ton demi-sombre, la teinte d'encre de Chine qui le rendra ne sera ni claire ni foncée et à peu près celle qui conviendrait comme bleu de lointain; il pourra donc se faire que l'éloignement conduise à ne modifier que très-peu la teinte rendant le rouge. Cependant, comme il ne faut jamais en dessin rester dans l'indécision, on devra franchement adopter un rouge clair ou un rouge foncé; s'il est clair, on en rendra les effets comme on a fait pour du jaune; s'il est foncé, on agira comme il va être dit pour le bleu;

4° Un objet bleu dans la lumière, le bleu étant une couleur sombre, se rendra, en premier plan, par une teinte d'encre de Chine un peu accentuée; en s'éloignant, cette teinte devra diminuer, tandis que l'air viendra pour la foncer; le premier effet l'emportera; par conséquent, pour les bleus, surtout les bleus sombres (ceci ne s'appliquerait pas aux bleus clairs), la distance se rendra en diminuant le ton du premier plan.

Règle générale. — Veut-on savoir, en faisant un lavis, si tel ton d'ombre ou de lumière doit être rabattu ou éclairci en s'éloignant, on commencera par établir le ton qui conviendrait aux lointains, et qui sera très-voisin de celui qui figurera le ciel; les tons plus clairs que celui-là s'assombriront en s'éloignant, mais sans jamais dépasser comme intensité celle des lointains; les tons plus foncés que celui des lointains devront s'éclaircir en s'éloignant, mais sans jamais devenir plus clairs que le ton des lointains,

En résumé, tous les tons, en s'éloignant, tendront à se rapprocher d'un ton unique, qui est celui des lointains.

Effets de contraste et d'irradiation. — Ces effets sont physiologiques et se produisent sur les nerfs de la rétine. Leur influence est considérable sur l'aspect apparent

des objets; le dessinateur doit les connaître, afin de les produire dans son lavis en les exagérant. Il augmentera ainsi l'illusion produite par eux sur le spectateur. Voici les principaux effets de contraste et d'irradiation:

1° Si deux surfaces placées à côté l'une de l'autre sont l'une noire et l'autre blanche, leur différence d'éclat s'exagère par le seul fait de leur juxtaposition;

2° Une même surface légèrement grise paraîtra presque noire si on la fait se détacher sur un fond très-blanc ou très-lumineux, et presque blanche si on la met sur un fond noir;

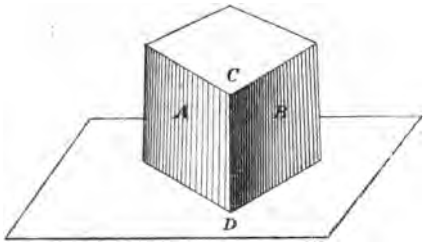
3° Un cercle très-blanc placé sur un fond moins blanc semblera entouré d'une auréole dégradée grise. Au contraire, un cercle très-noir placé sur un fond presque blanc semblera entouré d'une auréole plus blanche que le fond et se dégradant vers le blanc du fond en s'éloignant du cercle;

4° Une surface d'une certaine couleur, verte, par exemple, se détachant sur un fond vert un peu différent d'elle, paraît moins verte que si on la place sur un fond d'une couleur complémentaire, rouge par conséquent. Autrement dit: deux tons de couleurs analogues s'atténuent réciproquement, et deux tons de couleurs opposées, c'est-à-dire complémentaires, s'exaltent l'un par l'autre;

5° Un rond d'une certaine couleur placé sur un fond blanc paraît entouré d'une auréole dégradée, teintée de la couleur complémentaire.

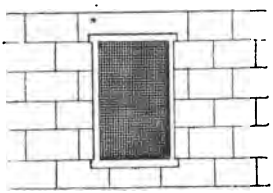
6° *Effet d'irradiation.* — Deux surfaces égales, l'une noire et l'autre blanche, placées à côté l'une de l'autre, ne paraissent pas égales, et la surface blanche paraît plus grande. C'est par un effet analogue que le croissant de la lune, alors que la lumière cendrée est visible, semble déborder sur la partie obscure du disque. Un fil fin, obscur, visible sur un fond gris, disparaît si le fond devient plus éclairé. Les plombs des vitraux d'église paraissent beaucoup plus minces qu'ils le sont en réalité. Dans certains cas, c'est à peine si on les voit. En résumé, il y a empiètement du clair sur l'obscur.

Conséquences. — (*a*) Si deux plans A et B se coupent suivant une arête vive CD; si l'un d'eux est éclairé, et si l'autre est dans l'ombre, la face dans l'ombre paraît plus noire aux environs de l'arête CD et la face éclairée plus blanche.



Le dessinateur devra donc dans son lavis accuser cet effet en l'exagérant.

(*b*) En architecture, les fenêtres qui se détachent sur les murs qui, même dans l'ombre, sont beaucoup plus éclairés que l'intérieur des pièces auxquelles appartiennent ces fenêtres, paraissent très-noires et plus foncées en haut qu'en bas. Ce dernier effet tient à ce que, dans les appartements, les parties basses des parois intérieures sont plus éclairées que les parties hautes.

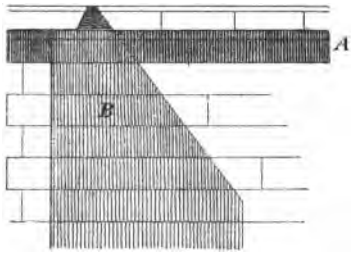


(*c*) Dans un édifice, les toits paraissent presque toujours sombres; à moins qu'ils se fassent miroirs et réfléchissent la lumière. Cela tient à ce qu'ils se détachent sur le ciel, qui est presque toujours très-brillant. Les ombres dans les toits paraissent toujours très-noires.

(*d*) Le ciel étant bleu, les objets qui se détachent sur lui doivent paraître plus *orangés* qu'ils ne sont. Ce fait est surtout sensible pour les édifices en pierres jaunes. Aussi, les architectes ont-ils l'habitude, dans leurs lavis, lorsqu'ils veulent rendre l'effet d'un édifice en pierre rouge ou jaune, de passer la teinte plus intense à la partie supérieure.

Plus généralement, à cause du contraste puissant dû au ciel très-clair, tous les tons, que ce soient des tons d'ombre ou des tons de couleur, doivent être plus intenses à la partie supérieure des édifices qu'à la partie inférieure. On donnera plus loin une seconde cause de cet effet, due aux reflets du sol.

(*e*) En architecture, les ombres fines portées par les moulures de faible saillie se détachent ordinairement sur un mur blanc à grande surface éclairée, et paraissent plus fines et plus noires qu'elles ne sont en réalité. Au contraire, les grandes ombres portées par des corps de bâtiment en saillie, paraissent plus claires et plus transparentes que les précédentes. Dans un dessin, on devra exagérer ces effets comme l'indique le croquis ci-contre. *(A suivre.)*



BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Session de novembre 1878.

5 novembre. — 1° Deux joints A et B sont distants l'un de l'autre de d kilomètres. La tonne de charbon prise en A coûte a francs; la tonne de charbon prise en B coûte b francs; le transport de la tonne coûte c franc par kilomètre. Trouver entre A et B le point où la tonne de charbon coûte le même prix, qu'elle vienne de a ou de b et vérifier que les prix sont égaux?

Appl.: $d = 800$ kil. $a = 37$ fr. 50. $b = 46$ fr. 75. $c = 0$ fr. 018.

2° Par un point o situé dans l'espace à une hauteur h au-dessus du plan horizontal, on mène des plans faisant tous le même angle α avec le plan horizontal. Démontrer que leurs intersections avec ce plan sont toutes tangentes à une circonférence de cercle. Indiquer le point du plan où est situé le centre de cette circonférence, et calculer le rayon.

7 novembre. — 1° Calculer les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse a, sachant que le volume engendré par le triangle en tournant autour de l'un des côtés égale m fois celui engendré quand il tourne autour du deuxième côté. Cas de $m = 1$.

2° Démontrer que si les projections d'une droite sur les deux plans de projection sont perpendiculaires aux traces d'un plan, la droite est perpendiculaire à ce plan.

Session d'avril 1879.

31 mars. — 1° Deux circonférences de rayon r et r' se coupent, la distance de leurs centres est d. Calculer les angles sous lesquels la corde d'intersection MN est vue des centres o et o'.

Application $r = 10^m$. $r' = 13^m$. $d = 15^m$.

2° Résoudre $(x + 1)(2y + 1) = 5x + 9y + 1$.

$(x + 2)(3y + 1) = 9x + 13y + 2$.

Vérifier les valeurs.

2 *avril.*— 1° Sur une droite de longueur a on a décrit un segment capable d'un angle donné A. Calculer le rayon du cercle et l'arc du segment où est inscrit l'angle A.

Application: $a = 436$. $A = 58°32'$.

2° Résoudre :

$$\log (7x - 9)^2 + \log (3x - 4)^2 = 2.$$

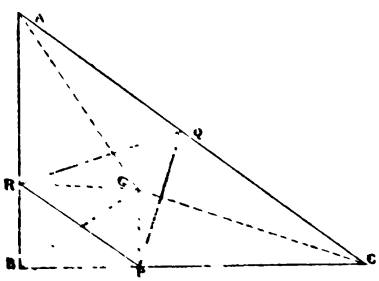
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 129.

Solution par M. Lannes, élève du Lycée de Tarbes.

Soient P, Q, R *les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de gravité d'un triangle* ABC *sur les côtés de celui-ci,* T *l'aire du triangle* ABC *et* a, b, c *ses côtés. Démontrer que l'aire du triangle* PQR *est égale à* $\frac{4}{9}\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2}\,T^2$.

Le triangle ABC ayant un angle C supplémentaire de l'angle PGQ du triangle PGQ, ces deux triangles sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent ces angles. On a donc :



$$\frac{PQG}{ABC} = \frac{GQ \,.\, GP}{a \,.\, b};$$

de même

$$\frac{GQR}{ABC} = \frac{GQ \,.\, GR}{bc}$$

$$\frac{GPR}{ABC} = \frac{GR \,.\, GP}{ac}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre et remplaçant GQ, GP, GR par leurs valeurs $\frac{2T}{3b}$, $\frac{2T}{3a}$, $\frac{2T}{3c}$ on aura :

$$\frac{PQR}{T} = \frac{4T^2}{9}\left[\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right]$$

d'où $$PQR = \frac{4}{9}\,\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2b^2c^2}\,T^2.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Hoc, de Longwy; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saulnier; Lacroix, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Étienne; Vazou, collége Rollin; Landre, de La Flèche; Longueville, à Charleville.

QUESTION 133.

Solution par M. Bompard, élève du Collége Stanislas.

ABCD *et* AB'C'D' *sont deux carrés tels que* BAB' DAD' *soient en ligne droite.* B'C *coupe* AD *en* E *et* CD *coupe* AB' *en* F. *Prouver que* AE *et* AF *sont des lignes égales.*

Les triangles semblables DD'C' et DAF donnent

$$\frac{AF}{D'C'} = \frac{AD}{DD'}.$$

De même les triangles AEB', BB'C donnent également

$$\frac{AE}{AB'} = \frac{BC}{BB'}.$$

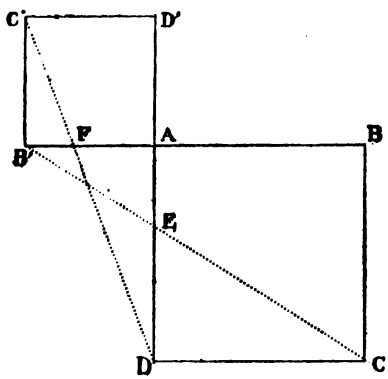
Or, $D'C' = AB'$,

$AD = BC$,

$DD' = BB'$

Donc

$AE = AF$.



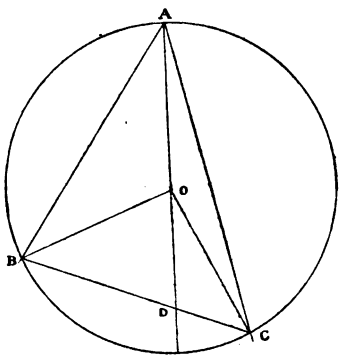
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Huet, Gelinet, d'Orléans; Tessier, d'Angers; Rollet, de Saint-Quentin; Landre, de la Flèche; Dupuy, de Grenoble; Zuloaga, de Liége; d'Ocagne, collège Chaptal; Chareyre, de Bourg; Plet, Paulme, école de Passy; Peyrabon, Johannet de Châteauroux; Vermand, de Saint-Quentin; Lenormand, de Rouen; Pecquery, du Havre; Detchenique, de Mont-de-Marsan; Objois, de Moulins; Gondy, de Pontarlier; Ailleret, de Versailles; Foissey, de Dijon; Pombard, Jacquier, à l'école normale de Charleville; Longueville, à Charleville.

QUESTION 135.

Solution par M. Landre, élève du Prytanée militaire, La Flèche.

Prouver que la portion du diamètre du cercle circonscrit à un triangle ABC, *comprise entre le sommet* A *et le côté opposé* BC *est égale à* $\dfrac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin 2B + \sin 2C}$.

En effet, AD = AO + OD et les angles BOC, AOC, AOB, sont respectivement doubles des angles A, B, C.



Considérant successivement les triangles AOB et AOC, on a

$$\frac{AO}{\sin(90 - C)} = \frac{c}{\sin 2C}$$

$$\frac{AO}{\sin(90 - B)} = \frac{b}{\sin 2B}$$

dès lors

$$AO = \frac{c \cos C}{\sin 2C} = \frac{b \cos B}{\sin 2B}$$

d'où

$$AO = \frac{c \cos C + b \cos B}{\sin 2C + \sin 2B}$$

Si l'on considère les triangles BOD et DOC, on a

$$OB = \frac{BD \cos A}{\sin 2C} = \frac{DC \cos A}{\sin 2B},$$

d'où

$$OD = \frac{a \cos A}{\sin 2B + \sin 2C}.$$

Dès lors

$$AO + OD = AD = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin 2B + \sin 2C}.$$

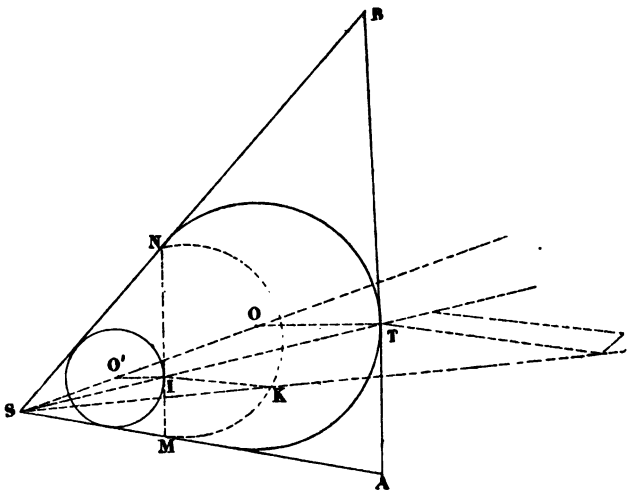
Nota. — Ont résolu la même question: MM. Zuloaga, de Liége; Hugot, école Ozanam, Lyon; Hoc, de Longwy; Peyrabon, de Châteauroux; Élie, collége Stanislas.

QUESTION 136.

Solution par M. Cordeau, élève de l'École Lavoisier.

Mener un cercle tangent à deux droites données de position de telle sorte que si l'on mène une tangente parallèle à une direction donnée et terminée aux deux lignes, le rectangle des segments déterminés par le point de contact soit égal à un carré donné.

Soit O le cercle cherché et ATB la tangente. Construisons le cercle O' tangent aux deux droites données et joignons le point S centre de similitude des deux cercles O et O' au point



T; cette droite coupe le cercle O' en I et la tangente MN en ce point est parallèle à AB. Il en résulte que les triangles SIM, STA sont semblables ainsi que les triangles SIN et STB. Donc

$$\frac{AT \cdot TB}{MI \cdot IN} = \frac{\overline{ST}^2}{\overline{SI}^2},$$

et comme

$$AT \cdot TB = m^2$$

et

$$MI \cdot NI = n^2 = \overline{IK}^2$$

on a

$$\frac{m^2}{\overline{IK}^2} = \frac{\overline{ST}^2}{\overline{SI}^2}$$

ou $$\frac{m}{IK} = \frac{ST}{SI}$$

et $$ST = \frac{m}{IK} \cdot SI$$

Pour construire cette quatrième proportionnelle, joignons le point S au point K et le problème revient à mener une droite de longueur donnée m parallèle à IK et s'appuyant sur deux droites données ST, SK.

Le point T étant déterminé menant OT parallèle à OI. Le point O est le centre du cercle cherché.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Manceau, d'Orléans; Fain, école Bossuet, lycée Louis-le-Grand; Hoc, de Longwy; Lachesnais, de Versailles; Dupuy, à Grenoble; Vermand, à Saint-Quentin; Blessel, à Paris.

QUESTION 140.

Solution par M Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées, Paris.

Prouver que dans un triangle on a:

$$\frac{r}{R} = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a + b + c}$$

Cette égalité revient à la suivante:

(1) $aR \cos A + bR \cos B + cR \cos C = r(a + b + c)$.

Or O étant le centre du cercle circonscrit au triangle, H, K, L, les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les côtés du triangle, on a $R \cos A = OH$, par suite $aR \cos A = 2$ surf BOC. De même $bR \cos B = 2$ surf AOC, $cR \cos C = 2$ surf AOB. Le premier membre de l'égalité (1) n'est autre chose que le double de la surface du triangle ABC. Il en est de même du second. Donc l'égalité proposée est démontrée.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Moles, d'Angoulême; Zuloaga, à Liége; Hugot, de Lyon; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saulnier; Hoc, de Longwy; Elie, à Stanislas; Landre, à la Flèche.

QUESTIONS PROPOSÉES

171. — Dans un triangle dont les côtés sont en progression arithmétique, A étant l'angle moyen, on a :

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3};\ \operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=2\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

(*Burnier.*)

172. — Le produit des trois côtés d'un triangle rectangle évalués en nombres entiers est toujours divisible par 60.

(*Dufrenoy.*)

173. — Si dans un triangle, les bissectrices des angles à la base rencontrent les côtés opposés sur une parallèle à la base, le triangle est isoscèle. (*Dufrenoy.*)

174. — Étant donné un parallélogramme, on construit sur les diagonales des rectangles tels que les côtés opposés aux diagonales se coupent sur l'un des côtés du parallélogramme. Démontrer que la somme des deux rectangles est équivalente au parallélogramme. (*Dufrenoy.*)

175. — On donne un cercle et une tangente fixe à ce cercle en un point I. Sur cette tangente on prend deux points mobiles A et B tels que le produit $AI \times BI$ soit constant. Par les points A et B on mène des tangentes qui se coupent en un point C dont on demande le lieu géométrique. (*de Longchamps.*)

176. — Par un point pris sur le prolongement d'un des côtés d'un triangle, mener une droite qui coupe les deux autres côtés, et qui soit telle que la projection sur le premier de la partie interceptée entre les deux autres côtés soit égale à une longueur donnée.

177. — Soit un triangle ABC; aux points milieux A', B', C des côtés on élève des perpendiculaires à ces côtés, sur lesquelles on prend $A'D = \frac{1}{2}BC$; $B'E = \frac{1}{2}AC$; C'F

$= \frac{1}{2}$ AB. (A′ est le milieu de BC, etc., et les perpendiculaires sont menées extérieurement au triangle.) Démontrer : 1° que les droites telles que EF et AD sont égales ; 2° qu'elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre ; 3° que les trois droites AD, AE, CF se coupent en un même point.

(*Nomy.*)

178. — Étant donné un parallélogramme ABCD, on mène par le point C une sécante PCQ qui coupe en P et Q respectivement les côtés AB et AD. Par A et P, on fait passer une circonférence tangente à AD au point A ; par A et Q, on fait passer une autre circonférence tangente à AB au point A. Ces deux circonférences se coupent en un point M dont on demande le lieu géométrique lorsque la sécante PCQ tourne autour du point C.

179. — Construire géométriquement un triangle connaissant un côté, le pied de la hauteur correspondante, et sachant que les bissectrices d'un des angles adjacents à ce côté sont égales. (*Mignot.*)

180. — Sur les trois arêtes d'un trièdre, on prend trois longueurs égales à l'unité OA, OB, OC. Démontrer que si l'on appelle V le volume du tétraèdre OABC, a, b, c les faces en O, on a :

$$3V = \sqrt{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c+a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}$$

(*Thual.*)

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 11580-9.

THÉORIE DES CENTRES

DES MOYENNES HARMONIQUES

Par M. Kœhler.

Quoiqu'elle ne figure pas explicitement dans les programmes officiels, la théorie de la proportion harmonique est entrée dans l'enseignement; je ne me propose pas de l'exposer dans tous ses détails, ni de développer les nombreuses applications qu'elle comporte et qui se trouvent dans la plupart des traités de géométrie. Le but de cet article est de montrer comment la notion de la proportion harmonique est susceptible de généralisation, en s'appliquant à un nombre quelconque de points situés ou non sur la même droite.

Maclaurin est, je crois, le plus ancien auteur qui ait considéré le centre des moyennes harmoniques d'un système de points *(Introduction au traité des courbes du troisième ordre)*. Poncelet a étendu et généralisé la conception de Maclaurin dans un long mémoire qui fait partie du *Traité des propriétés projectives*.

MM. de Joncquières, Crémona, etc., ont publié des travaux sur le même sujet; la théorie des centres harmoniques de divers ordres sert de point de départ à M. Crémona pour la démonstration d'un grand nombre de propriétés des courbes.

Les résultats obtenus par ces géomètres sont pour la plupart assez simples pour entrer dans le cadre de ce journal.

1. Je rappellerai d'abord quelques principes sur l'emploi des signes en géométrie.

Lorsqu'un segment est compté sur une droite à partir d'une certaine origine, on l'affecte du signe $+$ ou du signe $-$, suivant le sens dans lequel il est porté; dans la désignation du segment, la première lettre indique toujours

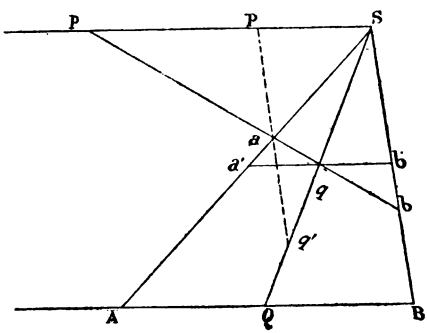
l'origine choisie. De là résulte l'identité AB = — BA, si l'on convient de regarder comme positifs les segments comptés de A vers B.

Si l'on a trois points A, B, C sur une même droite, on a *toujours* l'identité AB + BC + CA = o. Il est aisé de la vérifier en examinant les trois positions que C peut occuper par rapport aux points A et B, le segment AB étant regardé comme positif. Si, par exemple, C est entre A et B, on a AC + CB = AB, ou bien (puisque AC = — CA, et CB = — BC) AB = — CA — BC, et AB + BC + CA = o. De même pour les autres positions du point C.

Cette identité fondamentale permet de rapporter un segment AB à une origine quelconque O prise sur la même droite. On a identiquement AB + BO + OA = o, et par suite AB = — BO — OA ou bien AB = OB — OA.

Rappel des propriétés de la proportion et du faisceau harmonique.

2. Soient AB un segment de droite et Q son milieu ; si par un point S on mène une parallèle S*p* à AB, les quatre droites S*p*, SA, SQ, SB forment un faisceau harmonique. La propriété caractéristique d'un pareil faisceau, c'est qu'une transversale quelconque *paqb* coupe les rayons en quatre points liés par la relation $\frac{pa}{pb} = \frac{aq}{qb}$.



Menons $a'qb'$ parallèle à AB. On aura, par les triangles semblables $\frac{pa}{aq} = \frac{pS}{a'q}$ et $\frac{pb}{qb} = \frac{pS}{qb'}$; comme $a'q = qb'$ il en résulte $\frac{pa}{aq} = \frac{pb}{qb}$ ou bien $\frac{pa}{pb} = \frac{aq}{qb}$.

C'est la forme sous laquelle se présente la proportion harmonique dans le théorème classique sur les bissectrices

intérieure et extérieure de l'angle d'un triangle. Les côtés de l'angle et les deux bissectrices forment un faisceau harmonique dans lequel deux rayons sont perpendiculaires; la proportion harmonique a lieu entre les segments déterminés par les extrémités de la base et les pieds des bissectrices.

Le faisceau harmonique, défini comme nous venons de le faire, est tel qu'une parallèle à l'un quelconque des quatre rayons est divisée en deux parties égales par les trois autres. En effet menons par exemple $p'aq'$ parallèle à Sb; on aura $\frac{p'a}{Sb} = \frac{pa}{pb}$, $\frac{aq'}{Sb} = \frac{aq}{qb}$, et en vertu de l'égalité des seconds membres, $p'a = aq'$.

Il résulte de ce qui précède que la proportion harmonique est projective : si d'un point S on mène des rayons à quatre points déterminant sur une droite des segments harmoniques, toute transversale est coupée par les rayons en quatre points jouissant de la même propriété. Les points p, q sont conjugués l'un de l'autre par rapport aux points a, b; de même a et b sont conjugués par rapport à p et q. Lorsque la transversale devient parallèle à l'un des rayons, le point correspondant à ce rayon passe à l'infini, et son conjugué est au milieu de la distance des deux autres points.

L'égalité fondamentale (1) qui sert ordinairement de définition à la proportion harmonique peut être transformée de plusieurs manières. On peut l'écrire $\frac{pa}{pb} + \frac{qa}{qb} = 0$ ou bien $\frac{pa}{qa} + \frac{pb}{qb} = 0$ (2) ou enfin $\frac{pa}{qa} : \frac{pb}{qb} = -1$. Sous cette forme elle exprime qu'un des rapports anharmoniques des quatre points est égal à -1.

Rapportons tous les segments au point p pris pour origine; on aura, au lieu de l'égalité (2),

$$\frac{pa}{pa - pq} + \frac{pb}{pb - pq} = 0 \text{ ou } 2pa \,.\, pb = pq\,(pa + pb),$$

ou enfin $\frac{2}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb}$. (3)

Si l'on prend successivement pour origine chacun des

autres points, on trouvera de la même manière, en appliquant toujours la relation type AB = OB — OA rappelée au commencement de cet article :

$$\frac{2}{qp} = \frac{1}{qa} + \frac{1}{qb} \quad (3') \qquad \frac{2}{ab} = \frac{1}{ap} + \frac{1}{aq} \quad (3'')$$

$$\frac{2}{ba} = \frac{1}{bp} + \frac{1}{bq} \quad (3''')$$

Ces quatre dernières égalités (3), (3'), (3''), (3''') font ressortir la réciprocité qui existe entre les points p et q d'une part, a et b de l'autre ; elles se prêtent, ainsi que l'égalité (2), à la généralisation indiquée en commençant.

Si l'on prend pour origine le milieu o de ab, on aura

$$\frac{oa - op}{oa - oq} + \frac{ob - op}{ob - oq} = 0,$$

et en réduisant

$$2oa \,.\, ob + 2op \,.\, oq - oa \,.\, oq - ob \,.\, op - oa \,.\, op - ob \,.\, oq = 0.$$

Mais $ob = -oa$. Donc les quatre derniers termes disparaissent, et il reste $oa \,.\, ob + op \,.\, oq = 0$ ou bien $op \,.\, oq = \overline{oa}^2$. De même, si o' est le milieu de pq, on a $oa' \,.\, o'b = \overline{o'p}^2$. Ces deux relations sont souvent employées.

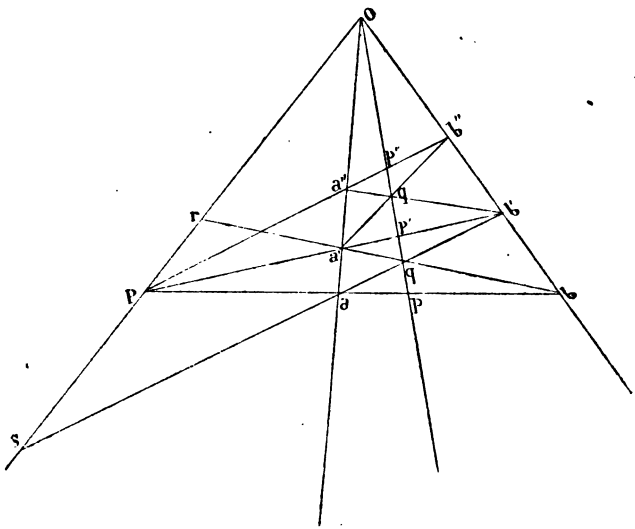
Quand on a sur une droite des couples de points (a, b), (a', b'), (a'', b''), etc., tels que $oa \,.\, ob = oa' \,.\, ob' = oa'' \,.\, ob'' = \ldots = \overline{op}^2$, on sait qu'ils forment une involution quadratique, dont o est le point central, p et q les points doubles qui divisent harmoniquement tous les segments tels que (ab).

Polaire d'un point par rapport à un système de deux droites.

3. Soient oa, ob deux droites, p un point de leur plan ; menons les transversales Pab, P$a'b'$, P$a''b''$ . . . ; le lieu des conjugués harmoniques de P par rapport aux couples (a, b), (a', b'), (a'', b'')... est une droite passant par le point o, et les points de concours q, q'... des diagonales de tous les quadrilatères $abb'a'$, $a'b'b''a''$... sont sur cette droite.

La première partie du théorème est évidente ; car si l'on prend le conjugué harmonique de P sur une quelconque des transversales, les rayons oP, oa, op, ob forment un faisceau

harmonique, et si l'on considère ensuite une autre transversale P$a'b'$, le conjugué p' de P par rapport à a', b' sera sur op. Pour démontrer la seconde partie, je remarque que les droites qP, qa, qp, qb forment un faisceau harmonique dans lequel qp est le conjugué de qP; de même, dans le faisceau qP, qa, qp', qb, le rayon qp' est le conjugué de qP; donc il se confond avec qp, et le point q est sur la droite $pp'o$.



On conclut de ce théorème que dans un quadrilatère complet chaque diagonale est coupée harmoniquement par les deux autres. Soit le quadrilatère $abb'a'$ dont les côtés opposés se coupent en O et P; le conjugué r de q par rapport aux points b, a' est sur la troisième diagonale OP. De même le conjugué s de q par rapport à b' et a est sur OP. Enfin, comme le faisceau qP, qa, qO, qb' est harmonique, les quatre points O, r, P, s déterminent une proportion harmonique.

(A suivre.)

NOTE D'ALGÈBRE

Recherche du maximum et du minimum de la fraction

$$z = \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{a'x^2 + 2b'xy + c'y^2}.$$

Posons $\frac{x}{y} = X$. La fonction proposée devient

$$z = \frac{aX^2 + 2bX + c}{a'X^2 + 2b'X + c'} \qquad (1)$$

ou $\quad (a - a'z)X^2 + 2(b - b'z)X + c - c'z = 0$

et en résolvant

$$(a - a'z)X + b - b'z = \pm\sqrt{(b - b'z)^2 - (a - a'z)(c - c'z)}. \quad (2)$$

Nous distinguerons trois cas selon que les racines de l'équation

$$(b'^2 - a'c')z^2 - (ac' + ca' - 2bb')z + b^2 - ac = 0 \quad (3)$$

obtenue en égalant à 0 la quantité sous le radical seront réelles et inégales ; réelles et égales; imaginaires.

1er CAS. — Les racines sont réelles et inégales. Supposons que α et β soient ces racines et que l'on ait $\beta > \alpha$.

Si $b'^2 - a'c' > 0$, on a

$$(a - a'z)X + b - b'z = \pm\sqrt{(b'^2 - a'c')(z - \alpha)(z - \beta)}.$$

Si z est inférieur ou égal à α, X est réel; mais si z est plus grand que α et plus petit que β, X devient imaginaire.

Donc la plus petite racine α est la valeur maximum de z. De la même manière on peut facilement voir que la plus grande racine β est un minimum.

Si $a' = 0$ ou si $c' = 0$ le radical devient $b'\sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)}$ et comme précédemment la plus grande racine est le minimum et la plus petite le maximum de la valeur de Z.

Dans ce qui précède, nous avons supposé réelles les racines du dénominateur. Si elles étaient imaginaires, c'est-à-dire si $b'^2 - a'c' < 0$, on aurait

$$(a - a'z)X + b - b'z = \pm\sqrt{(a'c' - b'^2)(z - \alpha)(\beta - z)};$$

on voit aisément que X est imaginaire pour toutes le valeurs de z excepté pour celles comprises entre α et β.

En conséquence la plus grande racine est un maximum et la plus petite un minimum de z.

Si $\alpha = \beta$ l'expression sous le radical est positive pour toutes les valeurs de z, et par suite z n'admet ni maximum ni minimum.

Si α et β sont imaginaires, l'expression sous le radical est positive, et dans ce cas z n'admet encore ni maximum ni minimum.

De ce qui précède il suit que la valeur de X correspondant à un maximum ou à un minimum de z, doit satisfaire à l'équation

$$(a - a'z)\,X + b - b'z = 0$$

Remplaçons z dans (1) par sa valeur tirée de cette équation on a

$$\begin{vmatrix} 1 & -X & X^2 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

ou $(ab' - ba')\,X^2 + (ac' - ca')\,X + bc' - cb' = 0.$ (4)

Cette équation détermine les valeurs de X qui correspondent au maximum et minimum de z.

On peut facilement voir que si les racines de l'équation (3) sont réelles, il en est de même de celles de l'équation (4) et réciproquement.

Ce qui précède nous permet de trouver élémentairement le maximum et le minimum de la fonction

$$Z = a\cos^2 x + 2b\cos x\cos y + c\cos^2 y \qquad (1)$$

$\cos x$ et $\cos y$ étant liés par la relation

$$(1 + p^2)\cos^2 x + 2pq\cos x\cos y + (1 + q^2)\cos^2 y = 1 \qquad (2)$$

a, b, c, p, q étant indépendantes de x et de y.

(Lacroix, *Calcul différentiel.*)

Multiplions et divisons le second membre de (1) et de (2) par $\cos^2 y$ il vient

$$Z = \left(a\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + 2b\frac{\cos x}{\cos y} + c\right)\cos^2 y$$

$$\left[(1 + p^2)\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + 2pq\frac{\cos x}{\cos y} + (1 + q^2)\right]\cos^2 y = 1$$

$$\text{d'où } \cos^2 y = \frac{1}{(1+p^2)\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 y} + 2pq\dfrac{\cos x}{\cos y} + (1+q^2)}$$

Remplaçons dans (1) $\cos^2 y$ par cette valeur et posons

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 y} = X^2$$

$$\text{on a } Z = \frac{aX^2 + 2bX + c}{(1+p^2)X^2 + 2pqX + (1+q^2)}.$$

Le maximum et le minimum de cette fonction sont, d'après ce qui précède, donnés par l'équation

$$(1+p^2+q^2)Z^2 - [(1+q^2)a - 2pqb + (1+p^2)c]Z + ac - b^2 = 0$$

et les valeurs correspondantes de X sont données par

$$[(1+p^2)b - apq]X^2 + [(1+p^2)c - (1+q^2)a]X + pqc - (1+q^2)b = 0.$$

Remarque. — L'équation (4) permet de résoudre simplement la question suivante : *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients des deux fractions* $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+bx'+c'}$ *et* $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha' x^2+\beta' x+\gamma'}$ *pour que ces deux fonctions aient des maximum et minimum correspondants aux mêmes valeurs de* x.

Les équations qui déterminent les valeurs maximum et minimum de chacune de ces fonctions sont d'après ce qui précède :

$$(ab' - ba')x^2 + 2(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0$$
$$(\alpha\beta' - \beta\alpha')x^2 + 2(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')x + (\beta\gamma' - \gamma\beta') = 0.$$

Ces deux équations devant avoir les mêmes racines, on doit avoir

$$\frac{ab' - ba'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} + \frac{ac' - ca'}{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'} = \frac{bc' - cb'}{\beta\gamma' - \gamma\beta'};$$

telle est la relation cherchée.

C. C.

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods,*

Par **James Booth,** membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite;* voir page 202.)

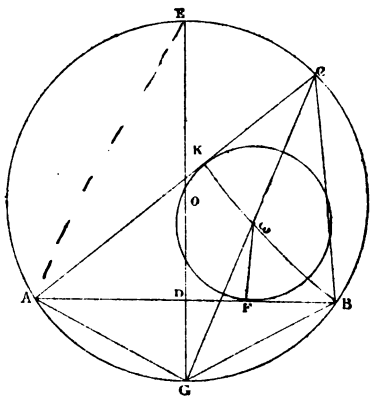
SUR LES TRIANGLES INSCRITS DANS UN CERCLE ET CIRCONSCRITS A UN AUTRE CERCLE.

12. Soit le triangle ABC, inscrit au cercle AEBG, et circonscrit au cercle FωK; nous allons chercher une expression de la distance des centres O et ω de ces cercles. Soit D cette distance; appelons R et r les rayons des cercles; on voit facilement que l'on a

$$(R+D)(R-D) = C\omega \,.\, G\omega,$$

ou

$$D^2 = R^2 - C\omega \,.\, G\omega.$$



Par le point G, menons le diamètre GOE; joignons le point A aux points G, E. La similitude des triangles CKω, AGE nous donne

$$GE \,.\, \omega K = C\omega \,.\, GA;$$

mais $GE = 2R$; $\omega K = r$; $GA = GB = G\omega$.

Donc $\quad 2Rr = C\omega \,.\, G\omega.$

Par suite $\quad D^2 = R^2 - 2Rr \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (45)$

Cette valeur de D est indépendante des côtés du triangle et, par suite, si l'on décrit deux cercles de rayon R et r, tels que la distance de leurs centres soit égale à $\sqrt{R^2 - 2Rr}$, tout triangle inscrit à l'un est circonscrit à l'autre.

13. Soit r' le rayon de l'un des cercles de contact; alors, en faisant quelques transformations, on arriverait à la formule

$$D'^2 = R^2 + 2Rr' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (46)$$

Si l'on prend les expressions analogues pour les autres côtés, et que l'on ajoute toutes ces expressions, on trouve

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 4R^2 + 2R(r' + r'' + r''' - r) \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Mais on a vu (form. 10) que l'on a $r' + r'' + r''' - r = 4R$; donc

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

Donc *la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit aux centres des quatre cercles de contact est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit.*

On peut voir facilement que G, milieu de l'arc AB, est le centre du cercle qui passe par les extrémités du côté AB, et par les centres ω et Ω du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit.

14. *Si un triangle est inscrit à un cercle et circonscrit à un autre cercle, ces deux cercles ont en commun un pôle et sa polaire.*

Soit d la distance du centre O du cercle circonscrit à la polaire commune, δ la distance entre le centre du cercle inscrit et le pôle commun, et, comme précédemment D la distance entre les centres de ces deux cercles; on a, en appelant R et r les rayons des cercles

$$(D + \delta)d = R^2; \quad (d - D)\delta = r^2.$$

En éliminant δ, on trouve

$$d = \frac{(R^2 - r^2) + R(R - 2r) \pm r\sqrt{4Rr + r^2}}{D}.$$

SUR LE TRIANGLE ORTHOCENTRIQUE.

15. Le triangle *orthocentrique* a été défini le triangle formé par les pieds des hauteurs d'un triangle donné, et ces perpendiculaires se coupent en un point appelé *orthocentre*. Le cercle qui est circonscrit à ce triangle peut être appelé le cercle *orthocentrique*. Poncelet l'appelle aussi le *cercle des neuf points*, par suite d'une propriété qui sera établie plus loin.

Soient A, B, C les angles du triangle donné, a, b, c les côtés opposés, et R le rayon du cercle circonscrit. Les côtés du triangle orthocentrique sont a cos A, b cos B, c cos C. En effet, soient A', B', C' les sommets du triangle ortho-

centrique respectivement opposés aux sommets A, B, C du triangle donné ; alors, les côtés du triangle A'BC' sont $a \cos B$, $c \cos B$, et A'C'. On a donc

$$A'C'^2 = a^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 B - 2ac \cos^3 B$$

ou $$A'C'^2 = \cos^2 B(a^2 + c^2 - 2ac \cos B).$$

Mais la quantité entre parenthèses n'est autre chose que AC^2 ou b^2.

Donc $$b' = b \cos B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

On a aussi, d'après un théorème connu : $a = 2R \sin A$.

Mais les côtés du triangle orthocentrique sont, d'après ce que nous venons de voir, $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$; de plus, si A', B', C' sont les angles de ce triangle, on a

$$A' + 2A = \pi;$$

d'où $$\sin A' = \sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

Enfin, si R' est le rayon du cercle circonscrit au triangle orthocentrique, on a

$$2R' = \frac{a \cos A}{\sin 2A} = \frac{a}{2 \sin A}.$$

Donc, $R = 2R'$ (49); c'est-à-dire que le rayon du cercle circonscrit au premier triangle est double du rayon du cercle orthocentrique.

16. En général, l'aire d'un triangle est donnée par l'équation $$abc = 4R\Delta.$$

En appelant Δ' l'aire du triangle orthocentrique, dont les côtés sont $a \cos A$, $b \cos B$, $c \cos C$, on a

$$abc \cos A \cos B \cos C = 4R'\Delta'.$$

Mais $abc = 4R\Delta$, et $R = 2R'$. Donc on a

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = 2 \cos A \cos B \cos C. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

Si des perpendiculaires sont abaissées des sommets d'un triangle sur les côtés de son triangle orthocentrique, elles passent par le centre du cercle circonscrit au triangle donné.

Comme les hauteurs du triangle sont les bissectrices du triangle orthocentrique, les perpendiculaires abaissées de deux sommets, A et B, par exemple, du triangle donné sur les côtés du triangle orthocentrique, font des angles égaux avec le côté C. Donc ces lignes se coupent en un même point,

et comme ces trois lignes sont égales, elles se coupent au centre du cercle ABC. Ainsi, de même que, en abaissant des sommets d'un triangle des perpendiculaires sur les côtés opposés, on détermine l'orthocentre par l'intersection de ces perpendiculaires, de même en abaissant des mêmes sommets des perpendiculaires sur les côtés du triangle orthocentrique, on détermine le centre du cercle circonscrit au triangle donné.

17. Puisque les perpendiculaires abaissées de l'orthocentre H sur les côtés du triangle primitif sont les bissectrices des angles du triangle orthocentrique, il en résulte que H est le centre du cercle inscrit au triangle orthocentrique.

Trouver la valeur du rayon ρ du cercle inscrit au triangle orthocentrique.

Soit p' le demi-périmètre du triangle orthocentrique, et Δ' sa surface. On a alors $\Delta' = p'\rho$. Mais on a (form. 48)

$$2p' = a \cos A + b \cos B + c \cos C$$

donc
$$2p' = \frac{1}{R}(aq' + bq'' + cq''') \qquad (51)$$

en appelant q', q'' et q''' les perpendiculaires abaissées du centre O sur les côtés du triangle donné;

mais
$$aq' + bq'' + cq''' = 2\Delta.$$

Donc on a

$$p'\rho = \Delta', \text{ et } \Delta = p'R \qquad (52)$$

Donc $\rho = \dfrac{R\Delta'}{\Delta}$.

Mais, d'après la formule (50), on a

$$\rho = 2R \cos A \cos B \cos C \qquad (53)$$

On a aussi
$$\frac{\rho}{R} = \frac{\Delta'}{\Delta} \qquad (54)$$

On en déduit les propositions suivantes : *La surface du triangle orthocentrique et celle du triangle donné sont proportionnelles au rayon du cercle inscrit dans le premier triangle et au rayon du cercle circonscrit au second.*

La surface d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit multiplié par le demi-périmètre du triangle orthocentrique.

On obtient ainsi un nouveau théorème simple pour trouver l'expression de la surface du triangle.

18. La surface du triangle donné est la somme du triangle orthocentrique et des trois triangles formés avec les segments de ces côtés; le double de la surface de l'un de ces triangles est $bc \cos^2 A \sin A$. Donc

$$bc \cos^2 A \sin A + ca \cos^2 B \sin B + ab \cos^2 C \sin C + 2\Delta' = 2\Delta$$

ce que l'on peut écrire

$$bc \sin A + ac \sin B + ab \sin C - abc\left(\frac{\sin^3 A}{a} + \frac{\sin^3 B}{b} + \frac{\sin^3 C}{c}\right) = 2\Delta - 2\Delta'.$$

Mais $\quad bc \sin A = ac \sin B = ab \sin C = 2\Delta$

donc $4\Delta + 2\Delta' = 4R\Delta\left(\frac{\sin^3 A}{a} + \frac{\sin^3 B}{b} + \frac{\sin^3 C}{c}\right)$

et comme $R\Delta' = \Delta\rho$, on a, en multipliant par R

$$2R + \rho = 2R^2\left(\frac{\sin^3 A}{a} + \frac{\sin^3 B}{b} + \frac{\sin^3 C}{c}\right) \quad (55)$$

19. *Déterminer une expression pour le carré de la distance entre le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre, ou une expression de* OH^2.

Si l'on prend le triangle dont les sommets sont O, H et un des sommets, A par exemple, du triangle donné, les côtés de ce triangle sont OH, R et $2R \cos A$, et l'angle en A est égal à $C - B$. Donc on a

$$OH^2 = R^2 + 4R^2 \cos^2 A - 4R^2 \cos A \cos (C - B) \quad (56)$$

Mais $A = \pi - (C + B)$; donc

$$OH^2 = R^2[1 - 4 \cos A \{\cos (C + B) + \cos (C - B)]$$

ou $\quad OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C); \quad (57)$

et, en vertu de la formule (53), on a

$$OH^2 = R^2 - 4R\rho \quad (58)$$

En appliquant la formule (50), on trouve aussi

$$OH^2 = R^2\left(1 - \frac{4\Delta'}{\Delta}\right). \quad (59)$$

Enfin, en appliquant d'abord la formule (34), puis au résultat la formule (12), on trouve

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \quad (60)$$

20. *La somme des carrés des distances des sommets d'un triangle à l'orthocentre, diminuée de la distance de ce point au*

centre du cercle circonscrit, est égale à trois fois le carré du rayon.

En effet, on a $AH^2 = 4R^2 \cos^2 A$; donc

$AH^2 + BH^2 + CH^2 = 4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$.

Mais $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$ et, en vertu de l'égalité (57), on a, par soustraction

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 - OH^2 = 3R^2. \qquad (61)$$

Le rayon ρ du cercle inscrit dans le triangle orthocentrique est égal à $2R \cos A \cos B \cos C$; donc

$$OH^2 = R(R - 4\rho).$$

Ajoutant le double de cette expression à la précédente, on trouve

$$AH^2 + BH^2 + CH^2 + OH^2 = 5R^2 - 8R\rho. \qquad (62)$$

21. *Trouver les rayons des cercles inscrit et ex-inscrit au triangle orthocentrique.*

Nous avons vu que l'on a $\rho = 2R \cos A \cos B \cos C$ et $2 \cos A \cos B \cos C = 1 - (\cos^2 A + \cos^2 R + \cos^2 C)$, on en tire $\rho = R(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2)$.

Mais $$\sin^2 A = \frac{a^2}{4R^2}.$$

En substituant on trouve en posant $2P^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\rho = \frac{P^2 - 4R^2}{2R} \qquad (63)$$

De même, on a $$\rho' = \frac{bc \sin A \cos A}{a}$$

ou $\rho' = 2\Delta \dfrac{\cos A}{a}$; mais $\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

Donc $$\rho' = \frac{\Delta}{4R\Delta}(b^2 + c^2 - a^2) = \frac{P^2 - a^2}{2R} \qquad (64)$$

On a des formules analogues pour ρ'' et ρ'''.

Si l'on ajoute ces expressions, on trouve

$$\rho + \rho' + \rho'' + \rho''' = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4R^2}{2R} = \frac{P^2 - 2R^2}{R} \qquad (65)$$

Puisque l'on a

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$,

et que le rayon du cercle inscrit au triangle orthocentri-

que est égal à 2R cos A cos B cos C, comme on a aussi, en appelant q', q'', q''' les distances du centre du cercle circonscrit aux côtés, $\cos^2 A = \frac{q^2}{R^2}$, on en déduit

$$q'^2 + q''^2 + q'''^2 = R(R-\rho) \qquad (66)$$

(A suivre.)

SOMMATION DIRECTE ET ÉLÉMENTAIRE

DES CARRÉS, DES CUBES, DES QUATRIÈMES ET DES CINQUIÈMES PUISSANCES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS AINSI QUE DES n PREMIERS NOMBRES IMPAIRS,

Par Georges **Dostor.**

I. — Somme des carrés des n premiers nombres entiers.

Nous avons les identités

$$(n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1,$$
$$(n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

Nous en tirons, en retranchant membre à membre,

$$(n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1) = 6n.$$

Si nous multiplions les deux membres par $\frac{n}{6}$, et que nous posions, en général,

$$A_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (1)$$

nous pourrons écrire

$$n^2 = A_n - A_{n-1}, \qquad (2)$$

attendu que $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ se déduit de A_n ou de (1), en y remplaçant n par $n-1$.

Dans la formule (2), remplaçons n successivement par tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'à n; nous obtenons la suite des égalités

$$1^2 = A_1,$$
$$2^2 = A_2 - A_1,$$
$$3^2 = A_3 - A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-1)^2 = A_{n-1} - A_{n-2},$$
$$n^2 = A_n - A_{n-1}.$$

Ajoutons membres à membres, et, dans le second membre de l'égalité résultante, supprimons les termes égaux et de signes contraires qui sont en évidence et qui s'entre-détruisent. Nous trouvons ainsi que la somme des carrés des n premiers nombres entiers est

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = A_n.$$

Si nous désignons cette somme par Σn^2 et que nous nous reportions à la notation (1), nous obtiendrons la formule

$$\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \text{(I)}$$

Corollaire I. — Représentons par Σn la somme des n premiers nombres entiers, de sorte que

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si nous divisons, par cette égalité, l'expression (I), il nous viendra

$$\frac{\Sigma n^2}{\Sigma n} = \frac{2n+1}{3} = \frac{n+(n+1)}{3}. \qquad \text{(II)}$$

Ce résultat prouve que

La somme des carrés des n *premiers nombres entiers, divisée par la somme de ces mêmes nombres, égale le tiers de la somme du dernier* n *de ces nombres et du nombre suivant* n + 1.

Corrollaire II. — Si le dernier nombre n égale un multiple de 3 plus 1, le nombre suivant $n + 1$ sera un multiple de 3 plus 2 ; par suite leur somme sera divisible par 3. Donc

La somme des carrés des n *premiers nombres entiers est divisible par la somme de ces mêmes nombres, chaque fois que le dernier nombre considéré* n *égale un multiple de* 3 *plus* 1.

Corrollaire III. — Si l'on veut avoir la somme des carrés des n nombres entiers, qui suivent le nombre n,

il suffira d'abord de remplacer n par $2n$ dans la formule (I). On aura ainsi

$$\Sigma\,(2n)^2 = \frac{2n\,(2n+1)\,(4n+1)}{6}.$$

Si de cette somme on retranche la somme des carrés des n premiers nombres entiers, ou l'expression (I), on obtiendra la somme des carrés des n nombres entiers qui viennent après le nombre n. Cette somme sera donc

$$\Sigma(2n)^2 - \Sigma n^2 = \frac{2n(2n+1)\,(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

ou bien

$$\Sigma(2n)^2 - \Sigma n^2 = \frac{n(2n+1)}{6}\,[8n+2-n-1],$$

c'est-à-dire

$$\Sigma(2n)^2 - \Sigma n^2 = \frac{n(2n+1)\,(7n+1)}{6}. \quad \text{(III)}$$

II. — Somme des carrés des n premiers nombres impairs.

Le n^{me} nombre impair étant $2n-1$, la somme des carrés $2n-1$ premiers nombres entiers s'obtiendra en remplaçant, dans la formule (I), n par $2n-1$; cette somme sera ainsi

$$\Sigma(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)\,(4n-1)}{3}.$$

Or les $n-1$ nombres pairs, qui précèdent le n^{me} nombre impair $2n-1$, sont

$$2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ (2n-4),\ (2n-2),$$

ou $\quad 2.1,\ 2.2,\ 2.3,\ \ldots,\ 2(n-2),\ 2(n-1).$

La somme des carrés de ces $n-1$ nombres pairs sera par conséquent

$$2^2\,[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-2)^2+(n-1)^2],$$

ou, en vertu de la formule (I),

$$\frac{2^2\,(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} = \frac{2n\,(n-1)\,(2n-1)}{3}$$

La somme S_2 des carrés des n premiers nombres impairs est donc exprimée par la différence

$$S_2 = \frac{n(2n-1)(4n-1)}{3} - \frac{2n(n-1)(2n-1)}{3}$$

$$= \frac{n(2n-1)}{3}\Big[(4n-1) - 2(n-1)\Big],$$

ou par

$$S_2 = \frac{(2n-1)\,2n\,(2n+1)}{6} = \frac{n(4n^2-1)}{3}. \quad \text{(IV)}$$

III. — Somme des cubes des n premiers nombres entiers.

Il est aisé de voir que

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n;$$

multipliant par $\frac{n^2}{4}$, on obtient l'identité

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = n^3,$$

qui peut s'écrire $\quad n^3 = B_n - B_{n-1}, \quad$ (3)

en posant $\quad Bn = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad$ (4)

Dans l'égalité (3), remplaçons n successivement par tous les nombres entiers, depuis 1 jusqu'à n; nous aurons la suite des identités

$$\begin{aligned} 1^3 &= B_1, \\ 2^3 &= B_2 - B_1, \\ 3^3 &= B_3 - B_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)^3 &= B_{n-1} - B_{n-2}, \\ n^3 &= B_n - B_{n-1} \end{aligned}$$

Ajoutons membres à membres, il nous viendra, après suppression des termes égaux deux à deux et de signes contraires,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = B_n,$$

ou, en ayant égard à la notation (4),

$$\Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad \text{(V)}$$

Ainsi *la somme des cubes des* n *premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces mêmes* n *premiers nombres entiers.*

Corollaire. — Élevons au carré les deux membres de la formule (I), nous aurons:

$$(\Sigma n^2)^2 = \frac{n^2 (n + 1)^2 (2n + 1)^2}{36}.$$

Divisons cette égalité membre à membre par la formule (V), nous obtiendrons la relation

$$\frac{(\Sigma n^2)^2}{\Sigma n^3} = \frac{(2n + 1)^2}{9} = \left[\frac{n + (n + 1)}{3}\right]^2. \quad \text{(VI)}$$

Elle prouve que

Le carré de la somme des carrés des n *premiers nombres entiers, divisé par la somme des cubes des mêmes nombres, égale le carré du tiers de la somme du dernier nombre* n *et du nombre suivant* n + 1.

Si le dernier nombre n est un multiple de 3 plus 1, $(\Sigma n^2)^2$ sera divisible par Σn^3.

IV. — Somme des cubes des n premiers nombres impairs.

La somme des cubes des $2n - 1$ premiers nombres entiers s'obtient en mettant $2n - 1$ à la place de n dans la formule (V), ce qui donne

$$\Sigma(2n - 1)^3 = n^2(2n - 1)^2$$

mais la somme des cubes des $n - 1$ nombres pairs, qui précèdent le nombre $2n - 1$, est

$$2^3[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n - 2)^3 + (n - 1)^3]$$

ou $$8\Sigma (n - 1)^3 = \frac{8(n - 1)^2 n^2}{4} = 2n^2(n - 1)^2.$$

Donc la somme S_3 des cubes des n premiers nombres impairs sera

$$S_3 = n^2(2n - 1)^2 - 2n^2(n - 1)^2 =$$
$$n^2[(4n^2 - 4n + 1) - (2n^2 - 4n + 2)],$$

ou (VII) $$S_3 = n^2(2n^2 - 1)$$

(A suivre.)

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DU LAVIS

Par M. **Pillet**, professeur de lavis à l'École Polytechnique.

(*Suite;* voir page 212.)

Des reflets dans le dessin de machines et dans le dessin d'architecture. — Dans le dessin de machines, on ne cherche pas à réaliser un effet artistique. Le lavis a surtout pour but de rendre la forme des objets; on ne fait sentir la position relative des objets que par les ombres qu'ils portent les uns sur les autres, et par les différences d'intensité des tons qui les recouvrent. Dans bien des cas, on ne trace même pas les ombres portées, et on rend chaque objet comme s'il était isolé dans l'espace. On trace donc sa ligne d'ombre propre et on fait le lavis soit par teintes fondues, soit par teintes plates, à l'aide des lignes d'égales teintes en ne tenant compte que du rayon atmosphérique principal.

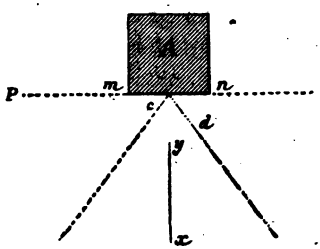
En architecture, les édifices reposant sur le sol, qui est fortement éclairé, et souvent de couleur claire, les reflets atmosphériques doivent être combinés avec les reflets émanant du sol. Ces derniers sont même les plus intenses.

Cherchons à nous rendre compte de la direction suivant laquelle ils ont le plus d'intensité.

Cette direction combinée avec celle du rayon atmosphérique principal nous donnera celle des rayons de reflets totaux.

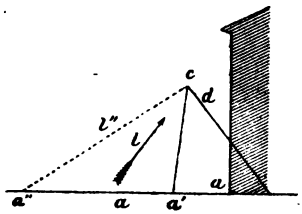
Rayon terrestre principal. — Soit en projection horizontale A un édifice rectangulaire, reposant sur un sol mat, éclairé et renvoyant de la lumière par diffusion et non par réflexion, comme pourrait le faire une nappe d'eau. Il est évident que si nous plaçons un petit élément plan vertical *cd*, dans une position inclinée sur la face *mn* de l'édifice, il ne recevra de reflets que des points du sol situés dans

l'angle *pcq* et sera d'autant moins éclairé qu'il sera plus loin d'être parallèle à la face *mn*. On peut donc dire que le rayon terrestre principal doit être dans un plan vertical, *xy*, perpendiculaire sur la face *mn* de l'édifice.



Quel angle, avec le plan horizontal, fait-il dans ce plan? — Pour nous en rendre compte, faisons une coupe verticale sur l'édifice.

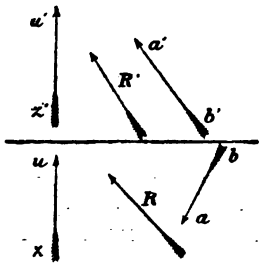
Un petit élément plan, *cd*, incliné à l'angle α, reçoit de la lumière d'une infinité de points, tels que *a'*, *a*, *a''* situés à des distances *l'*, *l*, *l''*, lui envoyant de la lumière dont l'intensité varie avec l'angle d'incidence. En combinant tous ces effets, il est facile de reconnaître :



1° Que l'élément *cd* sera plus éclairé quand il sera près du sol que quand il en sera loin ;

2° Qu'il sera éclairé au maximum quand il fera avec le sol un certain angle α que le calcul pourrait déterminer. Le rayon de reflet maximum dû au sol, sera pris normal au plan *cd*, dans la position précédente, répondant à cet angle α d'éclairement maximum.

Combinaison des reflets du sol et des rayons atmosphériques. — Rayon aéro-terrestre principal. — Combinons les reflets du sol représentés par le rayon terrestre *zu–z'u'*, situé dans un plan de profil *zu* et dirigé de bas en haut, avec le rayon atmosphérique principal représenté par *ba–b'a'* (dans l'hypothèse du rayon à 45°). Le premier est plus intense que le



second, et on pourra les réunir en un seul RR′ que nous nommerons le rayon aéro-terrestre principal; on le prend ordinairement en architecture dirigé suivant la diagonale d'un cube, mais non plus directement opposé aux rayons solaires. On prend les reflets inclinés à 45°, dirigés de droite à gauche, de bas en haut et d'arrière en avant. Les projections d'un de ces rayons seraient les droites R et R′.

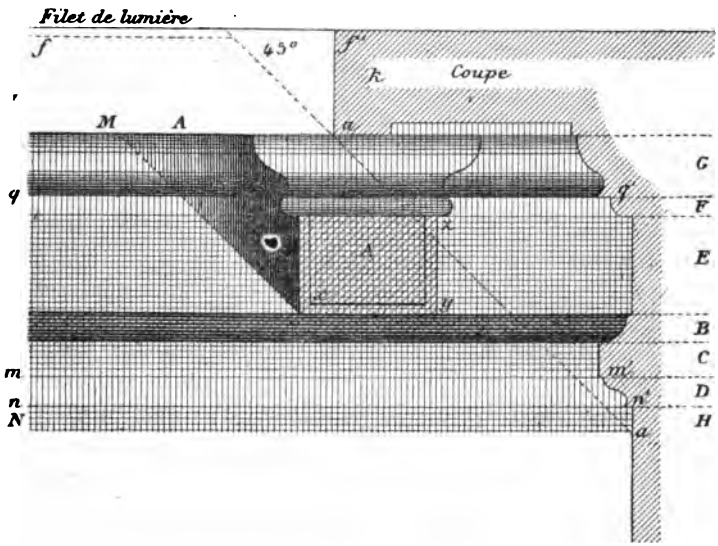
Remarque. — Il est bien entendu que ce rayon aéro-terrestre n'est que conventionnel. C'est un rayon qui, pris seul, éclairerait les ombres à peu près comme le font tous les rayons de reflets qui viennent dans toutes les directions, avec des intensités variables. Il faudra bien se garder de lui donner des propriétés ombrantes (Voir plus loin § C, Contre-ombres).

Conséquences. — (*a*) Dans un dessin d'architecture représentant la façade ou la coupe d'un édifice, toutes les ombres doivent être plus claires en bas de l'édifice qu'en haut, comme étant plus près de la source des reflets.

(*b*) Les moulures qui dans l'ombre sont tournées du côté du sol doivent être moins noires que celles qui sont tournées du côté du ciel. Plus généralement, le point le plus clair d'une moulure placée dans l'ombre est celui pour lequel le rayon aéro-terrestre lui est normal.

Contre-ombres. — (*c*) Les reflets du sol sont quelquefois assez intenses pour produire des ombres dans les ombres. On nomme ces dernières des contre-ombres. On ne les trace que dans les ombres portées, en les supposant produites par le rayon aéro-terrestre principal, tel que nous l'avons défini. Seulement, il ne convient pas de donner à ces contre-ombres des contours aussi définis qu'aux ombres directes, ni de les prolonger aussi loin. En effet, les reflets qui viennent de tous les points du sol produisent des pénombres très-considérables qui font que les contre-ombres disparaissent à très-petite distance des objets qui les portent et que leurs contours s'estompent très-rapidement. On fait ordinairement les contre-ombres à l'aide de teintes très-rapidement adoucies ou fondues.

Application. — Soit à faire le lavis de la portion de corniche indiquée sur le croquis ci-après. Un larmier K est soutenu par un talon G accompagné d'une banquette F. — Un bandeau C est surmonté d'un cavet renversé B et



soutenu par un talon D. Enfin, une console A est placée sous le larmier. Le tout est dans l'ombre N*a*, portée par le larmier sur la frise; on opérera comme il suit :

1° On commence par passer une teinte générale donnant le ton de pierre, et composée, si cette dernière est jaune, d'ocre jaune et de terre de Sienne brûlée. On la dégrade de haut en bas, on la tient donc plus intense à la partie supérieure qu'à la partie inférieure. On a soin de ménager en blanc les filets de lumière sur les arêtes éclairées telles que *ff'*. Ces filets se trouvent en haut et à gauche.

2° **On passe ensuite la teinte d'ébauche.** — Elle est composée d'encre de Chine soit pure soit un peu violacée par de la laque carminée, et une pointe de bleu de cobalt. Cette teinte est placée sur tout ce qui est occupé par les ombres propres ou portées. On doit la passer d'un seul coup

et sans faire de réserves. Cette teinte assez peu intense doit posséder le ton que l'on veut attribuer dans les ombres aux parties les plus en reflet. Ces parties sont le dessous des talons G ou D ou bien encore la partie inférieure de la baguette F. Cette teinte d'ébauche est dégradée de haut en bas.

3° **On fait tourner les moulures.** — Le modèle des moulures se rendra soit à teintes plates soit à teintes fondues, mais en les considérant comme corps dépolis. Les parties les plus noires sont celles pour lesquelles les normales seraient dirigées vers le ciel et non vers le sol. Dans les dessins à petite échelle on fait ces teintes au tire-ligne.

4° **On lave les surfaces planes.** — Nous trouvons des surfaces planes en E, en H, en C et en A, sur la face antérieure de la console. On est fixé sur l'intensité de la teinte qui répond à ces surfaces en regardant sur les moulures contiguës dont le lavis est fait et qui sont situées au même plan qu'elles, les éléments de ces moulures pour lesquelles le plan tangent est parallèle aux plans que l'on veut laver. On placera donc sur ces plans les teintes voulues pour qu'il y ait concordance d'intensité. Ces teintes sont placées en *réserve*, c'est-à-dire en ménageant les *filets de reflets* sur les arêtes qui regardent le rayon *aéro-terrestre*.

Nous trouvons ces filets en *nn'*, *mm'*, *qq'* et sur la console *xy* et *yz*, c'est-à-dire en bas et à droite sur la face A de la console qui est en avancement sur le plan E, on passera une teinte légère qui la rendra plus noire et la fera avancer.

5° **On fait les contre-ombres.** — On passera une teinte de contre-ombre sur le cavet qui regarde le ciel et échappe aux rayons de reflets.

Cette teinte sera modelée si le cavet est grand, elle sera plate si le cavet est de petite dimension.

Nous aurons également la contre-ombre portée par la console A. Nous la tiendrons assez noire aux environs de cette console et nous la dégraderons rapidement de bas en haut et de droite à gauche.

6° **Les retouches.** — Le lavis général une fois fini, il

est utile pour augmenter l'effet produit de revenir avec de la teinte de couleur ou avec de la teinte d'ombre sur certaines parties soit pour les faire tourner, soit pour les faire avancer ou reculer. On fait avancer les parties en lumière, en y plaçant quelques tons plus chauds, c'est-à-dire plus jaunes, ou plus rouges, et les parties dans l'ombre en forçant et même en colorant au bistre les teintes d'ombre. On fait reculer les plans en y passant des teintes bleuâtres, ou neutres très-légères.

On fait également avancer une partie de l'édifice, en la *faisant* davantage, c'est-à-dire en y plaçant plus de détails et rendant avec plus de recherche l'effet de ces détails, on la fait reculer en la laissant dans le vague, et comme dessin et comme lavis.

QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

POSÉES AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(1878).

Algèbre.

— Démontrer que l'inégalité

$$3\,(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2$$

a lieu pour toutes les valeurs de a.

— Résoudre $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} > 1.$

— Résoudre $\sqrt[3]{A + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{x}} = B.$

— Résoudre $x + y = a;\ x^4 + y^4 = b^4.$

— Trouver la somme

$$An = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Limite de An pour $n = \infty$.

— Résoudre l'inégalité

$$\frac{(x^2 - 5x + 6)\,(\sqrt{x} - 2)}{x^2 + 4x + 3} > 0.$$

— Volume maximum du cône de révolution dont la surface est constante.

— Calculer la somme

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Géométrie.

— La hauteur d'un triangle rectangle inscrit dans une parabole et dont l'hypoténuse est perpendiculaire à l'axe de cette courbe est constante et égale à $2p$.

— Construire $$x = \sqrt[4]{\frac{a^5}{b}}.$$

— On donne trois droites a, b et u; cette dernière est prise pour unité : construire $$x = \frac{a - b^3}{1 + ab}.$$

— Conditions pour que les hauteurs d'un tétraèdre se coupent au même point.

— Lieu des points également éloignés de trois droites qui se coupent au même point.

— Dans un trièdre, les plans qui passent par une arête et la bissectrice de la face opposée se coupent suivant une même droite.

— Dans un trièdre, les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

— Par le centre de similitude de deux cercles, on mène une sécante qui coupe le premier au point A, le second au point B; les tangentes en ces points se coupent en un point dont on demande le lieu géométrique.

— Construire un triangle connaissant les trois médianes.

— Dans une ellipse, une tangente mobile TT′ rencontre en T et T′ les tangentes aux extrémités du grand axe. — Démontrer que $AT \times AT'$ est constante.

Trigonométrie.

Un arc a pour sinus $\frac{1}{2}$, un autre $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ calculer le sinus de la somme.

— Démontrer les formules :

$$2\,S = R\,(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$
$$8\,S^2 = abc\,(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$$

dans lesquelles les lettres ont les significations ordinaires.

— Calculer la somme

$$\sin^2 a + \sin^2 (a + h) + \sin^2 (a + 2h) + \ldots + \sin^2 (a + nh).$$

— Vérifier la formule

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x;$$

en déduire une formule donnant la somme

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

— Résoudre un triangle connaissant le périmètre et la hauteur.

— Dans un triangle on a :

$$\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C.$$

Quelle particularité présente le triangle?

— Dans un triangle on a :

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}.$$

Quelle particularité présente le triangle?

— Résoudre l'équation : $\dfrac{\sin x}{\sin(\theta - x)} = m$.

— Trouver la somme

$$\cos^2 a + \cos^2 (a + h) + \ldots + \cos^2 (a + nh).$$

— Vraie valeur de $x \operatorname{cotg} x$ pour $x = 0$.

— Résoudre un triangle connaissant les angles et le rayon du cercle inscrit.

— Vraie valeur pour $x = 45°$ de

$$\frac{\cos(45 + x)}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)\cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \text{ pour } x = 0$$

— Une fonction rationnelle de $\sin \varphi$ et de $\cos \varphi$ peut toujours se mettre sous la forme

$$P + Q \cos \varphi$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de $\sin \varphi$. Démontrer que cette décomposition n'est possible que d'une seule façon.

— Calculer $\operatorname{tg} \frac{1}{4} a$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

NOTE D'ALGÈBRE

Par M. **Thual**, du Lycée de Lorient.

Transformation d'un radical double en une somme de deux radicaux simples.

Résolvons le système

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$
$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Ajoutons et retranchons successivement ces deux équations membre à membre, il vient

$$\frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}}{2} = \sqrt{x}$$

$$\frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}}}{2} = \sqrt{y}$$

Élevons les deux membres de ces deux égalités au carré, il vient :

$$\frac{2a + 2\sqrt{a^2 - b}}{4} = x \qquad \text{ou } x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

$$\frac{2a - 2\sqrt{a^2 - b}}{4} = y \qquad \text{ou } y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

Pour que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient rationnels, il faut et il suffit, comme on sait, que $a^2 - b$ soit carré parfait, alors

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

ÉCOLE NAVALE

CONCOURS DE 1879

Arithmétique et Géométrie.

1. La surface d'un cercle $\pi r^2 = 400$ mètres carrés. Démontrer que pour obtenir r à un décimètre près, il suffit de remplacer π par 3,1, valeur qui n'est pas inférieure de $\frac{1}{20}$ à la vraie valeur 3,1415... En effet, l'inégalité $r - r' = 20\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi'}}\right) < \frac{1}{10}$ est satisfaite si l'on prend $\pi' - \pi < \frac{1}{20}$. On trouvera $r = 11,3$ par défaut et l'on vérifiera que $3,1 \times (11,3)^2$ diffère peu de 400.

Nota. — *Nous avons copié cet énoncé tel qu'il a été donné aux élèves, tout en étant fort surpris de voir que, dans une composition à une école, on donne aux candidats la solution en même temps que l'énoncé. — Nous ferons remarquer aussi que π' étant inférieur à π, et par suite r' étant supérieur à r, il faudrait partout changer les signes.*

2. D'un point P, on mène une tangente à un cercle de rayon r, et on joint le point de contact M aux extrémités du diamètre parallèle à la tangente. Démontrer qu'on obtient ainsi deux cordes égales, équidistantes du point P, et que le cercle décrit du point P comme centre, avec le rayon $R = \frac{PM}{\sqrt{2}}$, est tangent à ces deux cordes. Si le point P est placé de manière que $R = 2r$, les deux cercles sont tangents.

Géométrie descriptive.

Un point A est situé dans la partie antérieure du plan horizontal, à $0^m,05$ de la ligne de terre. Un second point B, placé dans le premier dièdre à la droite du point A, est distant de $0^m,02$ du plan horizontal, de $0^m,03$ du plan vertical, et de $0^m,04$ du point A. On demande de construire les projections du cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne BA, dont le centre est au point B, et qui a $0^m,03$ de rayon.

Algèbre.

— Etant donnée l'équation du second degré

$$Ay^2 + Bxy + \frac{B^2 - \delta^2}{4A} x^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

la résoudre par rapport à y, et déterminer ensuite :

1° La limite c du rapport $\frac{y}{x}$ quand x augmente indéfiniment;

2° La limite de la différence $y - cx$ pour cette même valeur infinie de x.

Trigonométrie.

— On donne dans un triangle

$$a = 2597^m,845$$
$$b = 3084^m,327$$
$$c = 2136^m,737$$

Déterminer les trois angles et la surface.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

COMPOSITIONS DONNÉES EN 1878 AUX CANDIDATS QUI, EMPÊCHÉS A L'ÉPOQUE ORDINAIRE, N'ONT PU PRENDRE PART AUX COMPOSITIONS.

Mathématiques.

1. — Calculer les angles compris entre 0 et 180° satisfaisant à l'équation

$$5 \sin^2 x + 3 \sin x - 3 = 0.$$

2. — On donne l'angle O et le point A sur l'un des côtés, et l'on demande de trouver sur l'autre côté un point M tel que la distance AM soit moyenne proportionnelle entre OA et OM. Discussion sommaire.

3. — On donne le triangle BAC rectangle en A et l'on demande de déterminer sur BC un point M tel que, si l'on mène MN et MP respectivement perpendiculaires à AC et AB, et qu'on fasse tourner la figure autour de BC, le volume engendré par le rectangle ainsi formé soit égal à la somme des volumes engendrés par les triangles BMP et CMN.

Épure.

On donne deux sphères O et O′ tangentes l'une et l'autre aux deux plans de projection dans le premier dièdre. La sphère O a un rayon R = 45 millimètres, la sphère O′ un rayon R′ = 32 millimètres; la distance des centres OO′ = 60 millimètres. Ceci posé, on demande :

1° De construire les projections des deux sphères;

2° De construire les projections de la courbe intersection des deux solides;

3° De mener un plan tangent commun aux deux sphères coupant la verticale du centre de la sphère O à 50 millimètres au-dessous du plan horizontal de projection.

EXAMENS ORAUX DE SAINT-CYR 1879

— Étant donné un demi-cercle AB, mener par le point A une corde AM telle que, si par le point M on mène une tangente qui coupe le diamètre prolongé en C, on ait AM = MC.

— Dans un triangle équilatéral, on prend le milieu P de AB, et on propose de trouver sur BC un point M tel que, en menant la droite PM et abaissant MK perpendiculaire sur AC, on ait PM = MK.

— Dans un triangle, le point de concours des hauteurs est au quart de la hauteur AH, à partir de la base. Trouver une relation entre les angles B et C.

— On donne un triangle ABC rectangle en A; mener par le point A une droite AX, extérieure au triangle, et telle que, en abaissant les perpendiculaires BB′, CC′ sur AX, la somme des triangles ABB′, ACC′ soit égale à une surface donnée K^2. — Examiner le cas où cette surface est celle du triangle ABC.

— Dans un triangle, on connaît b et c, et l'on sait que $\cos B + \cos C = 1$. On demande de calculer a.

— On donne deux parallèles, un point P sur l'une d'elles, et un point Q en dehors. Par le point Q, on demande de mener une droite QNM rencontrant la parallèle PN en N et l'autre en M, de telle manière que MN = PN.

— On donne un cercle et un point P extérieur au cercle. On demande de trouver sur la circonférence un point M tel que, en joignant les points M, O, P, l'angle en O soit double de l'angle en P.

— On donne deux droites parallèles XY et AB : sur la seconde, on prend les points A, B, C, tels que 2AB = BC. Trouver sur XY un point D d'où l'on voie les segments AB et BC sous le même angle.

— Vraie valeur, pour $a = b$, de l'expression

$$\frac{a^m - b^m}{a^n - b^n}$$

— Rapport des volumes d'un trapèze qui tourne successivement autour de ses deux bases.

— On donne deux droites parallèles AB, CD, et leur plus courte distance BD. Sur le prolongement de cette plus courte distance, on prend un point P, et on demande de mener par le point P une sécante PMN rencontrant CD en N et AB en M, de telle manière que MN soit la moyenne arithmétique des lignes BM et DN.

— Maximum de $\sin x + \sqrt{3} \cos x$.

— Construire un triangle connaissant deux côtés et la bissectrice.

— Inscrire dans un demi-cercle un rectangle de périmètre donné.

— Dans un triangle on donne A, et l'on sait que la médiane AM est égale au produit des deux côtés b et c. Trouver les angles du triangle.

— Maximum de $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$, quand x varie de 0 à 90°.

— Par le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, mener deux droites également inclinées sur l'hypoténuse, et telles que leur produit soit égal à la surface du triangle.

— On donne le triangle ABC, et le point O, milieu de BC. On demande de mener la parallèle ED à BC, de façon que, en joignant le point O au point D, le trapèze BEDO ait une surface donnée.

— Dans un demi-cercle, on propose de mener AC de telle manière que, en menant le rayon OC, et la droite CD faisant avec OC un angle égal à ACO, et rencontrant le diamètre AB en D, on ait $CD = l$.

— Valeurs qu'il faut attribuer à m et n pour que le trinôme $x^3 + mx + n$ soit divisible par $(x - a)(x - b)$.

— Dans un secteur on donne l'angle au sommet, et les longueurs des cordes de deux arcs dans lesquels on partage l'arc du secteur. Trouver le rayon.

— Minimum de $\sin^2 x + a \cos x$.

— On donne le secteur OAB. On demande de mener une droite perpendiculaire au rayon OA, rencontrant ce rayon en K, l'arc en M et le rayon OB prolongé en N, de façon que le produit

$$KM \,.\, MN$$

soit maximum.

— Dans un trapèze on demande de prendre E sur le côté BC, de telle manière que, en menant la droite AE qui rencontre la base CD prolongée en F, le triangle AEB soit le tiers du triangle ECF.

— Résoudre $\sin^2 x + \sin^2 2x = a$.

— Dans un triangle on donne les trois angles; on mène la bissectrice et la médiane, et on demande de calculer l'angle de ces deux droites.

— Résoudre $\operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = m$.

— On a deux nombres différents terminés par 5; trouver la condition pour que leur produit soit terminé par 25.

— Résoudre $\cos x + \cos y = 1$.

$$\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} = m.$$

(*A suivre.*)

CONCOURS ACADÉMIQUES 1879

ACADÉMIE DE CLERMONT

Mathématiques élémentaires.

— Par un point fixe O d'une circonférence de rayon donné R, on mène deux cordes OA et OB dont la première est fixe et la seconde mobile. Etudier comment varie la longueur de la diagonale issue de O du parallélogramme construit sur OA et OB. Trouver les valeurs maxima et minima de cette diagonale ainsi que les positions correspondantes de OB.

ACADÉMIE DE POITIERS

Enseignement spécial.

— Une lame BAC, rectangle en A, repose en équilibre par les côtés de l'angle droit, sur deux disques fixes de même épaisseur que la lame, placés avec elle dans le même plan vertical, et ayant leurs centres O et O′ sur

une même horizontale. Si l'on suppose que, dans cette position d'équilibre, la verticale du centre de gravité de la surface ABC passe par le sommet de l'angle droit A et de plus que ce sommet est sur la ligne des centres, on demande d'exprimer au moyen des côtés a et b du triangle : 1° le rapport des rayons R et R' des disques ; 2° le rapport des segments AO, AO' de la ligne des centres ; 3° le rapport des charges supportées par les deux disques.

Si l'on a $b = 0,60$; $c = 0,80$; $R = 0,27$, épaisseur $0,05$; densité $= 7$, on calculera le poids de la lame, la distance MN des points de contact, et on construira exactement la figure relative à ces données à l'échelle de $1/10$.

ACADÉMIE DE LYON

Mathématiques spéciales.

On considère les coniques tangentes à deux droites rectangulaires OA, OB en deux points variables, et à une troisième droite AB en un point C. On demande 1° le lieu géométrique du point de contact des tangentes à ces coniques menées par un point donné P. Construire ce lieu dans le cas où le point P se trouve au sommet du rectangle construit sur OA, OB ; 2° quel est le lieu des foyers de ces coniques ? Construire le lieu dans le cas particulier où C est au milieu de AB, et examiner ce que devient ce lieu lorsque C étant au milieu de AB, on a OA = OB.

Mathématiques élémentaires.

On donne une circonférence O' dont le centre est situé sur une circonférence O donnée. On mène une corde quelconque OB, et on joint l'extrémité A du diamètre O'OA au point B. On joint ensuite le point A à l'un des points d'intersection C des deux cercles ; on détermine ainsi le point E, intersection de AC et de O'B, et par ce point E on mène une tangente EG au cercle O.

1° Lieu géométrique du point M, intersection de cette tangente avec AB ;

2° Démontrer que la droite BC passe par le second point D d'intersection des deux circonférences.

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 13444-9.

THÉORIE DES CENTRES

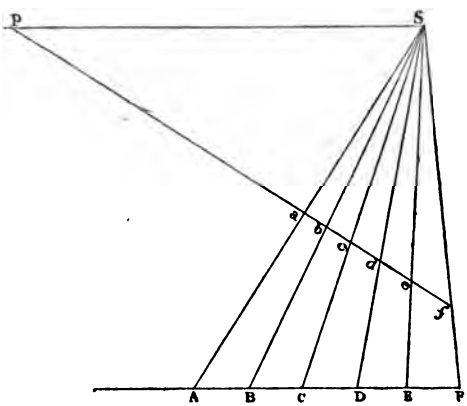
DES MOYENNES HARMONIQUES

Par M. **Kœhler.**

(*Suite*, voir page 225.)

Progression ou échelle harmonique.

4. Soit AF une droite divisée en parties égales aux points B, C, D, E; menons par un point S une parallèle à AF et coupons le faisceau S (p, A, B,... F) par une transversale quelconque *pabcdef*. Chacun des points de division à partir du second est conjugué harmonique de p par rapport au précédent et au suivant.



On a donc

$$\frac{2}{pb}=\frac{1}{pa}+\frac{1}{pc},\ \frac{2}{pc}=\frac{1}{pb}+\frac{1}{pd},\ \frac{2}{pd}=\frac{1}{pc}+\frac{1}{pe},$$

etc.... ou bien

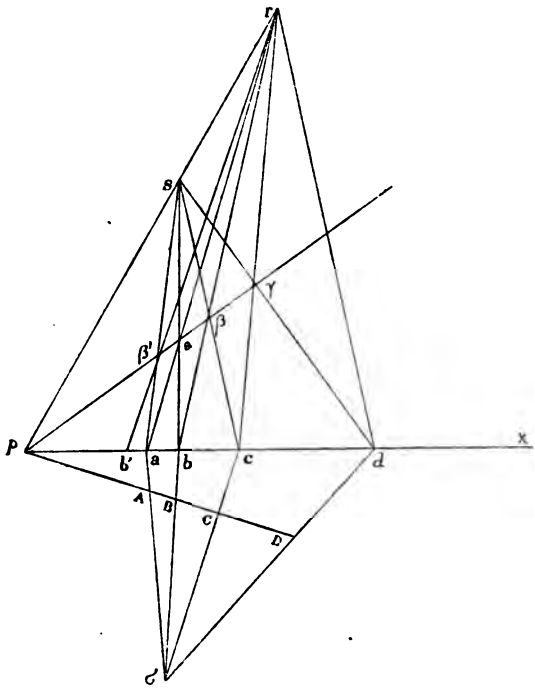
$$\frac{1}{pa}-\frac{1}{pb}=\frac{1}{pb}-\frac{1}{pc}=\frac{1}{pc}-\frac{1}{pd}=\frac{1}{pd}-\frac{1}{pe}=\ldots$$

Les inverses des segments comptés à partir de p forment ainsi une progression arithmétique la division marquée par le faisceau sur la transversale est une *progression* ou *échelle harmonique* par rapport au point p.

Construction d'une échelle harmonique.

On donne une droite pX, et il s'agit de construire sur cette droite une échelle harmonique par rapport au point p, échelle

dont *ab* soit le premier segment. Je mène par le point *p* deux droites arbitraires je prends sur l'une d'elles un point α; je joins αa, αb qui coupent la seconde droite en *r* et *s*. Je joins *rb*, puis $s\beta$ qui donne le troisième point *c* de l'échelle; de même *rc* donne le point γ, et $s\gamma$ le quatrième point *d*. Ainsi



de suite. On voit en effet, en considérant le quadrilatère *sbcr*, que la transversale $p\alpha\beta\gamma$ passe par le point de concours β des diagonales; donc β est conjugué de *p* par rapport à α et γ. Donc le faisceau $r(p, a, b, c)$ est harmonique.

On peut prolonger l'échelle vers la gauche en joignant S*b*, puis $r\beta'$ qui donne le point b', etc...

Pour diviser une longueur donnée AD en un nombre donné de parties formant une échelle harmonique par rapport au point *p*, on déterminera d'abord sur une droite *p*X une échelle arbitraire comme tout à l'heure; puis si

l'on veut partager AD en trois parties par exemple, on joindra Aa, Dd qui se coupent en σ; les rayons σb, σc couperont AD aux points cherchés b, c.

La construction que nous venons de donner d'après Poncelet s'applique en perspective. Le problème général de la perspective consiste à représenter l'intersection par un plan, appelé plan du tableau, de tous les rayons menés de l'œil aux points d'une figure donnée. Les relations géométriques entre les parties de cette figure se transforment sur sa perspective, et la connaissance de ces transformations permet souvent de simplifier les constructions. Supposons qu'on veuille faire sur un plan la perspective d'une droite AF divisée en parties égales, l'œil étant en S; on devra mener le plan SAF, chercher son intersection avec le plan donné et marquer sur la droite ainsi obtenue $pab...f$ (fig. 3) les traces des rayons SA, SB...; on aura évidemment une échelle harmonique par rapport au point p où le plan du tableau est rencontré par la parallèle à la droite donnée; ce point p, perspective du point à l'infini sur cette droite, est appelé *point de fuite.*

Centre des moyennes harmoniques d'un système de points en ligne droite.

5. Le centre des moyennes distances de n points en ligne droite a, b, c... (rapportés à une origine quelconque o) est un point q tel que l'on a $oq = \dfrac{oa + ob + oc + \ldots}{n}$.

Sa position est indépendante de l'origine; car si l'on prend une autre origine o', on aura

$$o'q - oo' = \frac{o'a + o'b + o'c + \ldots - n \cdot oo'}{n}$$

et, le terme $-oo'$ disparaissant des deux membres, il reste

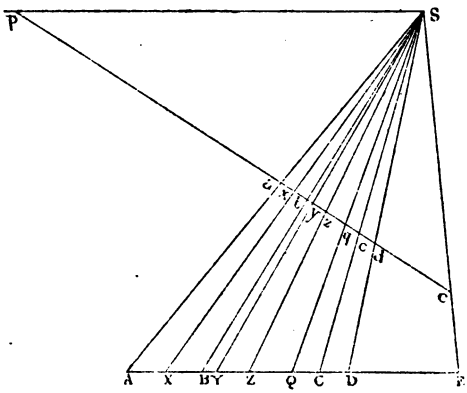
$$o'q = \frac{o'a + o'b + o'c + \ldots}{n}.$$

Pour construire le centre des moyennes distances, on prendra d'abord le milieu x de ab, puis le point y au tiers de la distance xc, le point z au quart de la distance yd, et ainsi de suite.

En effet, on a $ox = \frac{oa + ob}{2}$,

puis $oy = ox + \frac{oc - ox}{3} = \frac{2}{3}\, ox + \frac{oc}{3}$

ou $oy = \frac{oa + ob + oc}{3}$, etc

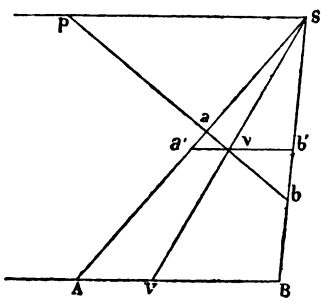


Théorème. — *Si l'on joint un point* S *aux* n *points* A, B, C... *et à leur centre des moyennes distances* Q, *et si l'on mène* Sp *parallèle à la droite* ABC..., *une transversale quelconque coupe le faisceau* S (A, B, C... Q) *en* p, a, b, c...q *et l'on a toujours la*

relation $\frac{n}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \ldots$

q est le *centre des moyennes harmoniques* de *p* par rapport aux *n* points *a, b, c*... et S*q* est l'*axe des moyennes harmoniques* du rayon S*p* par rapport aux rayons S*a*, S*b*...

Pour démontrer la relation précédente, considérons d'abord une droite AB partagée au point V en deux segments tels que l'on ait $\frac{AV}{VB} = \frac{\alpha}{\beta}$.



Joignons SA, SV, SB, menons S*p* parallèle à AB, puis une transversale *pavb*; on aura

$$\frac{\alpha + \beta}{pv} = \frac{\beta}{pa} + \frac{\alpha}{pb}.$$

En effet les triangles semblables déterminés par la parallèle *a'vb'* à AB donnent

$$\frac{av}{pa} = \frac{a'v}{ps}$$

et
$$\frac{vb}{pb} = \frac{vb'}{ps} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\, a'v}{ps}.$$

On conclut de là $\frac{av}{pa} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{vb}{pb}$

ou bien
$$\beta\,\frac{va}{pa} + \alpha\,\frac{vb}{pb} = 0$$

Cette égalité devient, en prenant le point p pour origine des quatre segments

$$\frac{\beta(pa - pv)}{pa} + \frac{\alpha(pb - pv)}{pb} = 0$$

ou bien
$$\frac{\alpha + \beta}{pv} = \frac{\beta}{pa} + \frac{\alpha}{pb} \qquad (4)$$

L'équation fondamentale du rapport harmonique est un cas particulier de celle-ci ; il suffit de faire $\alpha = \beta = 1$.

Si AV est la m^e partie de AB, on a

$$\frac{m}{pv} = \frac{m-1}{pa} + \frac{1}{pb}.$$

Cela posé, je reviens à la figure 5 et je considère les points x, y, z... q où la transversale coupe les rayons SX, SY, SZ... SQ menés aux points qui servent à construire de proche en proche le centre des moyennes distances Q de A, B, C...

On aura successivement

$$\frac{2}{px} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb},$$

puis
$$\frac{3}{py} = \frac{2}{px} + \frac{1}{pc},$$

(puisque $XV = \frac{1}{3}$ XC),

ou bien
$$\frac{3}{py} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc},$$

$$\frac{4}{pz} = \frac{3}{py} + \frac{1}{pd} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd}, \text{ etc.}$$

et enfin
$$\frac{n}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \ldots \qquad (5)$$

On peut énoncer le théorème réciproque : *Étant donné sur une transversale nn point* q *tel que l'on ait*

$$\frac{n}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \ldots,$$

si on forme le faisceau S (p, a, b, ... q) *et si on le coupe par une parallèle à* Sp, *la droite* Sq *passera par le centre des moyennes distances des points* A, B, C ... Mais cela n'a lieu que pour une parallèle à S*p*, et non pour une parallèle à un rayon quelconque, comme dans le cas du faisceau harmonique de quatre rayons.

Transformation de la relation (5).

Cette relation qui est projective, d'après ce qui précède, peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{pa} - \frac{1}{pq}\right) + \left(\frac{1}{pb} - \frac{1}{pq}\right) + \left(\frac{1}{pc} - \frac{1}{pq}\right) + \ldots = 0,$$

ou bien

$$\frac{pq - pa}{pa \,.\, pq} + \frac{pq - pb}{pb \,.\, pq} + \frac{pq - pc}{pc \,.\, pq} + \ldots = 0,$$

et, en multipliant par pq et changeant tous les signes

$$\frac{qa}{pa} + \frac{qb}{pb} + \frac{qc}{pc} + \ldots = 0 \qquad (6)$$

Cette forme se prête à une autre démonstration de la propriété projective du centre des moyennes harmoniques. Il s'agit de faire voir que si l'on coupe le faisceau S (p, a, b, . . . q) par une autre transversale $p'a'b'$... o aura encore $\frac{q'a'}{p'a'} + \frac{q'b'}{p'b'} + \ldots = 0$.

On a $\frac{qa}{Sa} = \frac{\sin qSa}{\sin aqS}$, $\frac{q'a'}{Sa'} = \frac{\sin q'Sa'}{\sin a'q'S}$,

et en divisant, $\frac{qa}{Sa} : \frac{q'a'}{Sa'} = \frac{\sin a'q'S}{\sin aqS}$.

De même $\frac{pa}{Sa} : \frac{p'a'}{Sa'} = \frac{\sin a'p'S}{\sin apS}$,

et par suite $\frac{qa}{pa} : \frac{q'a'}{p'a'} = \frac{\sin a'q'S}{\sin aqS} : \frac{\sin a'p'S}{\sin apS}$.

Le second membre de cette égalité reste invariable quand

on remplace les points a, a' par b, b', par c, c', etc. Car, en abaissant les perpendiculaires Sh, Sh' sur les deux transversales, on a $\sin a'q'S = \frac{Sh'}{Sq}$, $\sin aqS = \frac{Sh}{Sq}$, etc., et le quotient des rapports des sinus devient

$$\frac{Sh' \,.\, Sq}{Sh \,.\, Sq'} : \frac{Sh' \,.\, Sp}{Sh \,.\, Sp'} = \frac{Sq \,.\, Sp'}{Sq' \,.\, Sp} = \text{const} = \lambda.$$

On a donc

$$\frac{qa}{pa} = \lambda \frac{q'a'}{p'a'}, \quad \frac{qb}{pb} = \lambda \frac{q'b'}{p'b'}, \text{ etc.}$$

Si la somme des premiers rapports est nulle, il en est de même de la somme des seconds, *c. q. f. d.*

(A suivre.)

SOMMATION DIRECTE ET ÉLÉMENTAIRE

DES CARRÉS, DES CUBES, DES QUATRIÈMES ET DES CINQUIÈMES PUISSANCES DES u PREMIERS NOMBRES ENTIERS AINSI QUE DES n PREMIERS NOMBRES IMPAIRS

Par **Georges Dostor.**

(*Suite*, voir page 239.)

V. — Somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers.

Puisque $n(n+1)(2n+1) = (2n^2+3n+1)n$ nous avons

$$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n.$$

Posons

$$(5) \quad C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}.$$

nous aurons, en remplaçant n par $n - 1$,

$$C_{n-1} = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

puis, en retranchant de (5)

$$C_n - C_{n-1} = \frac{15n^4 + 15n^4}{30}$$

ou $$n^4 = C_n - C_{n-1}.$$

Dans cette identité, donnons à n successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$; nous obtiendrons la suite des égalités

$$\begin{aligned} 1^4 &= C_1, \\ 2^4 &= C_2 - C_1 \\ 3^4 &= C_3 - C_2 \\ &\ldots\ldots \\ (n-1)^4 &= C_{n-1} - C_{n-2}. \\ n^4 &= C_n - C_{n-1}. \end{aligned}$$

Ajoutant membre à membre et supprimant, dans le second membre de l'égalité résultante, les termes égaux et de signes contraires, qui s'entre-détruisent, on trouve que

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 + n^4 = C^n,$$

ou, en vertu de la notation (5),

$$\Sigma n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \qquad \text{(VIII)}$$

Telle est la formule, qui donne la somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers.

Corollaire I. — Le second membre pouvant s'écrire

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{3n^2+3n-1}{5},$$

on a, en vertu de la formule (I),

$$\Sigma n^4 = \Sigma n^2 . \frac{3n^2+3n-1}{5} \qquad \text{(IX)}$$

Corollaire II. — Si le dernier nombre n est un multiple de 5 plus 1 ou un multiple de 5 plus 3, le trinôme $3n^2 + 3n - 1$ sera exactement divisible par 5. Donc

La somme des quatrièmes puissances des n *premiers nombres entiers est exactement divisible par la somme des carrés de ces mêmes nombres, chaque fois que le nombre* n *est un multiple de* 5, *plus* 1, *ou un multiple de* 5, *plus* 3.

VI. — Somme des quatrièmes puissances des n premiers nombres impairs.

Le dernier de ces n nombres impairs étant $2n - 1$, cherchons d'abord la somme des quatrièmes puissances des $2n - 1$ premiers nombres entiers. Cette somme s'obtient, en remplaçant n par $2n - 1$ dans la formule (VIII). Elle est par suite

$$\Sigma(2n - 1)^4 = \frac{n(2n - 1)(4n - 1)(12n^2 - 6n - 1)}{15}$$

De cette somme retranchons la somme des quatrièmes puissances des $n - 1$ premiers nombres pairs

$$2[1, 2, 3, \ldots, (n - 2), (n - 1)],$$

qui est $\quad 2^4[1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n - 1)^4]$,

ou

$$2^4\Sigma(n - 1)^4 = \frac{8n(n - 1)(2n - 1)(3n^2 - 3n - 1)}{15}$$

La somme S_4 des quatrièmes puissances des n premiers nombres impairs sera donc

$$\begin{aligned} S_4 &= \Sigma(2n - 1)^4 - 2^4\Sigma(n - 1)^4 \\ &= \frac{n(2n - 1)}{15}\Big[(4n - 1)(12n^2 - 6n - 1) \\ &\quad - (8n - 8)(3n^2 - 3n - 1)\Big] \end{aligned}$$

ou
$$S_4 = \frac{n(4n^2 - 1)(12n^2 - 7)}{15} \qquad \text{(X)}$$

expression, que l'on peut encore mettre sous la forme

$$S_4 = \frac{(2n - 1)\,2n\,(2n + 1)\,(12n^2 - 7)}{30}.$$

VII. — Somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers.

Posons
$$D_n = \frac{n^2\,(n + 1)^2\,(2n^2 + 2n - 1)}{12} \qquad (6)$$

Nous aurons, en remplaçant n par $n - 1$,

$$D_{n-1} = (n - 1)^2\,n^2\,(2n^2 - 2n - 1);$$

puis, en prenant la différence,

$$D_n - D_{n-1} = \frac{n^2}{12}[(n^2 + 2n + 1)(2n^2 + 2n - 1)$$
$$- (n^2 - 2n + 1)(2n^2 - 2n - 1)] \qquad (7)$$

Le facteur entre crochets peut s'écrire

$$[(n^2 + 1) + 2n][(2n^2 - 2) + 2n]$$
$$- [(n^2 - 1) - 2n][(2n^2 - 1) - 2n],$$

ou
$$(n^2 + 1)[(2n^2 - 1) + 2n - (2n^2 - 1) + 2n]$$
$$+ 2n[(2n^2 - 1) + 2n + (2n^2 - 1) - 2n]$$
$$= (n^2 + 1)4n + 2n(4n^2 - 2)$$
$$= 4n^3 + 4n + 8n^3 - 4n = 12n^3.$$

Il vient par suite, en substituant dans (7),

$$D_n - D_{n-1} = n^5.$$

Dans cette identité remplaçons n successivement par les n premiers nombres entiers.

$$1, 2, 3, \ldots, (n-1), n;$$

nous aurons la suite des égalités

$$1^5 = D_1,$$
$$2^5 = D_2 - D_1,$$
$$3^5 = D_3 - D_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)^5 = D_{n-1} - D_{n-2},$$
$$n^5 = D_n - D_{n-1}.$$

Ajoutons toutes ces égalités membres à membres et faisons les réductions évidentes dans le second membre résultant; nous trouvons ainsi que

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + (n-1)^5 + n^5 = D_n,$$

ou, en ayant égard à la notation (6),

$$\Sigma n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}. \qquad \text{(XI)}$$

Corollaire I. — En vertu de la formule (V), nous avons

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Sigma n^3.$$

Par suite nous pouvons écrire

$$\Sigma n^5 = \Sigma n^3 . \frac{2n^2 + 2n - 1}{3} \qquad \text{(XII)}$$

Corollaire II. — Si le nombre n égale un multiple de 3 plus 1, le trinôme $2n^2 + 2n - 1$ sera divisible par 3. Donc

la somme des cinquièmes puissances des n *premiers nombres entiers est divisible par la somme des cubes de ces mêmes nombres, chaque fois que le nombre* n *est un multiple de* 3, *plus* 1.

Corollaire III. — A trois fois Σn^5 ajoutons Σn^3; nous aurons

$$3\Sigma n^5 + \Sigma n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1)}{4}$$

$$+ \frac{n^2 (n+1)^2}{4} = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} (2n^2 + 2n - 1 + 1)$$

ou

$$3\Sigma n^5 + \Sigma n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} . 2n (n+1) = \frac{n^3 (n+1)^3}{2}$$

Or on sait que $n (n+1) = 2\Sigma n$.

Donc il vient

$$4(\Sigma n)^3 = 3\Sigma n^5 + \Sigma n^3. \qquad \text{(XIII)}$$

Ainsi *le quadruple cube de la somme des* n *premiers nombres entiers est égal à la triple somme des cinquièmes puissances de ces* n *nombres, augmentée de la somme des cubes des mêmes nombres.*

VIII. — Somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres impairs.

La somme de cinquièmes puissances des $2n - 1$ premiers nombres entiers s'obtient en mettant $2n - 1$ à la place de n dans la formule (XI), et se trouve être

$$\Sigma (2n-1)^5 = \frac{(2n-1)^2 n^2 (8n^2 - 4n - 1)}{3}.$$

La somme des cinquièmes puissances des $n - 1$ nombres pairs, moindres que $2n - 1$ est

$$2^5 \Sigma (n-1)^5 = \frac{8 (n-1)^2 n^2 (2n^2 - 2n - 1)}{3}$$

Retranchant, on trouve que la somme S_5 des cinquièmes puissances des n premiers nombres impairs est

$$S_5 = \frac{n^2}{3} \Big[(2n-1)^2 (8n^2 - 4n - 1) - 8 (n-1)^2 (2n^2 - 2n - 1) \Big]$$

ou

$$S_5 = \frac{1}{3} n^2 \left(16n^4 - 20n^2 + 7 \right). \qquad \text{(XIV)}$$

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite*, voir page 233.)

22. *Trois fois la somme des carrés des distances des centres des quatre cercles de contact au centre du cercle circonscrit, donne un résultat égal à quatre fois la somme des carrés des côtés augmenté de quatre fois le carré de la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit.*

Nous avons vu (form. 47) que l'on avait

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2$$

et aussi (form. 60)

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

En remplaçant R^2 par sa valeur tirée de cette équation, on retrouve évidemment

$$3(D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2) + 4OH^2 \tag{67}$$

23. *La somme des carrés des côtés, augmentée de la somme des carrés des rayons des quatre cercles de contact, est égale à seize fois le carré du rayon du cercle circonscrit.*

On a (form. 6)

$$(a + b + c)^2 = 4p^2 = 4(r'r'' + r'r''' + r''r''')$$

et (form. 11)

$$bc + ca + ab = r'r''' + r''r''' + r'''r' + r\ (4R + r)$$

Mais $\quad 4R + r = r' + r'' + r'''.$

Donc, en retranchant de la première le double de la seconde, on trouve

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(r'r'' + r''r''' + r'''r') - 2r(r' + r'' + r''')$$

et comme $4R = r' + r'' + r''' - r$, on a, en élevant au carré et retranchant la précédente

$$16R^2 = r'^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + a^2 + b^2 + c^2 \tag{68}$$

24. *La somme des carrés des côtés d'un triangle est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit diminué de quatre fois la somme des carrés des perpendiculaires abaissées du centre sur les côtés.*

Car $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$,

donc $a^2 + b^2 + c^2 = 12R^2 - 4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$

ou $a^2 + b^2 + c^2 = 12R^2 - 4(q'^2 + q''^2 + q'''^2)$ (69)

25. *Dans tout triangle on a, en conservant aux lettres leur signification habituelle :*

$$\left(\frac{a}{r'} + \frac{b}{r''} + \frac{c}{r'''}\right)\left(\frac{a+b+c}{r' + r'' + r'''}\right) = 4 \quad (70)$$

Puisque l'on a $\frac{a}{r'} = \frac{a(p-a)}{pr}$, le premier facteur devient $\frac{2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{pr}$.

Mais on a (form. 12)

$$2p^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2r(4R + r).$$

et on sait aussi que $r' + r'' + r''' = 4R + r$, et $a + b + c = 2p$.

En substituant ces valeurs, on trouve la formule indiquée.

26. *Déterminer une expression pour* $H\omega$, *distance entre les centres des cercles inscrits dans le triangle donné et dans le triangle orthocentrique.*

Ces centres et le sommet A du triangle primitif forment les sommets d'un triangle dont les côtés sont

$$r \operatorname{cosec} \frac{A}{2},\ 2R\cos A,\ H\omega,$$

et l'angle au sommet $\frac{1}{2}(C - B)$.

Donc

$$H\omega^2 = 4R^2\cos^2 A + r^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2} - \frac{4Rr\cos A\cos\frac{1}{2}(C-B)}{\sin\frac{A}{2}} \quad (71)$$

Mais $$\frac{\cos\frac{1}{2}(C - B)}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{c + b}{a}$$

et $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

En substituant ces valeurs dans l'équation primitive, on trouve (*)

$$H\omega^2 = 4R^2 - 8Rr + ab + ac + bc - (a^2 + b^2 + c^2). \tag{72}$$

Mais on sait, d'après les équations (11) et (12), que l'on a

$$bc + ab + ac = p^2 + r^2 + 4Rr$$

et $$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2p^2 - 8Rr.$$

Donc $$H\omega^2 = 4Rr + 4R^2 + 3r^2 - p^2 \tag{73}$$

Si Ω, Ω', Ω'' désignent les centres des cercles ex-inscrits, on trouvera de même, en faisant les modifications nécessaires, les expressions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} H\Omega^2 &= 4R^2 + 8Rr' + bc - ac - ab - (a^2 + b^2 + c^2) \\ H\Omega'^2 &= 4R^2 + 8Rr'' - bc + ac - ab - (a^2 + b^2 + c^2) \\ H\Omega''^2 &= 4R^2 + 8Rr''' - bc - ac + ab - (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

En ajoutant ces expressions à l'égalité (72), et remarquant que $r' + r'' + r''' - r = 4R$, on trouve

$$H\omega^2 + H\Omega^2 + H\Omega'^2 + H\Omega''^2 = 48R^2 - 4(a^2 + b^2 + c^2) \tag{75}$$

Soient AH, BH, CH les distances de l'orthocentre aux sommets du triangle; on a

$AH^2 = 4R^2 - a^2$; $BH^2 = 4R^2 - b^2$; $CH^2 = 4R^2 - c^2$.

(*) Pour faire cette réduction, il faut écrire d'abord le second membre de l'équation (71) sous la forme suivante :

$$4R^2 - 4R^2(1 - \cos^2 A) + r^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2} - 4Rr \cdot \frac{\cos\frac{C - B}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \cos A$$

puis remarquer que l'on a

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = \frac{4\Delta^2}{b^2c^2},\ r^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2} = \frac{bc(p - a)}{p},$$

et enfin remplacer $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ par $\dfrac{(b + c)^2 - a^2 - 2bc}{bc}$

On arrivera alors à l'équation (72).

(*Note du Traducteur.*)

Donc, en substituant, on a

$$H\omega^2 + H\Omega^2 + H\Omega'^2 + H\Omega''^2 = 4(AH^2 + BH^2 + CH^2) \quad (76)$$

Puisque l'on a (form. 60)

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

et (form. 47)

$$D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2.$$

On en déduit

$$H\omega^2 + H\Omega^2 + H\Omega'^2 + H\Omega''^2 = D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 + 4OH^2 \quad (77)$$

Donc : *la somme des carrés des distances de l'orthocentre aux quatre centres des cercles de contact est égale à la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit aux quatre centres des cercles de contact, augmentée de quatre fois le carré de la distance du centre du cercle circonscrit à l'orthocentre.*

27. *On abaisse d'un sommet d'un triangle une perpendiculaire sur le côté opposé; on mène la bissectrice de l'angle du triangle jusqu'à la rencontre avec la base, et on inscrit un cercle dans ce triangle. Les distances du milieu de la base au pied de la hauteur, au point de contact du cercle inscrit et au pied de la bissectrice sont en progression géométrique.*

Car il est facile de voir que ces distances sont respectivement $\frac{c^2 - b^2}{2a}$, $\frac{c - b}{2}$, $\frac{a\,c - b}{2\,c + b}$.

Lorsque l'on prend les cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle, chaque côté a, par exemple, est touché en quatre points, deux à l'intérieur de l'angle A, et deux à l'extérieur. Le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit qui touchent a à l'intérieur de l'angle sont de part et d'autre de ce côté, et la distance de leurs points de contact est $c - b$; donc chacun d'eux est à une distance $\frac{1}{2}(c - b)$ du milieu M de a. Les deux autres cercles touchent le côté a d'un même côté en deux points L et N, extérieurs à l'angle A, et distants des points B et C de la quantité $p - a$; donc leur distance est $2(p - a) + a = b + c$; et la distance de l'un de ces points au milieu de a est $\frac{1}{2}(b + c)$.

28. *Relations entre les médianes* α, β, γ, *et les côtés* a, b, c *d'un triangle.*

On a, par un théorème bien connu

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4\alpha^2.$$

En prenant les relations analogues pour β^2 et γ^2, on a, en ajoutant $\quad 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (78)$

Faisons le carré de la première, et des formules analogues, et ajoutons, il vient

$$16(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) = 9(a^4 + b^4 + c^4) \qquad (79)$$

Enfin, faisons le carré de l'égalité (78) et retranchons-en l'égalité (79), il vient

$$16(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) = 9(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \qquad (80)$$

29. *Si par les points de contact* A' B' C' *du cercle inscrit dans un triangle donné, on mène à chaque côté une perpendiculaire rencontrant la médiane correspondante aux points* l, m, n, *on a*

$$\frac{1}{A'l} + \frac{1}{B'm} + \frac{1}{C'n} = \frac{2}{r}.$$

La distance du milieu de la base au pied de la hauteur issue du point A est $\frac{c^2 - b^2}{2a}$; la distance de ce même milieu au point de contact est $\frac{c - b}{2}$; et ces distances sont proportionnelles à h et $A'l$. On a donc

$$\frac{A'l}{h} = \frac{a}{c + b}.$$

D'où $\quad \frac{1}{A'l} = \frac{c + b}{ah} = \frac{c + b}{2\Delta}.$

Par conséquent, en prenant les autres formules analogues et ajoutant, on a

$$\frac{1}{A'l} + \frac{1}{B'm} + \frac{1}{C'n} = \frac{4p}{2\Delta} = \frac{2}{r} \qquad (81)$$

30. *Déterminer la distance entre le centre de gravité* K *et le centre* ω *du cercle inscrit.*

Considérons le triangle dont les sommets sont A, K, ω. Les côtés de ce triangle sont ωK, $\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, et $\frac{2\alpha}{3}$, α étant la médiane issue du point A.

Soit θ l'angle que fait la médiane α avec le côté c, par exemple.

Alors, comme la médiane divise en deux parties égales le triangle ABC, on a

$c \sin \theta = b \sin (A - \theta)$, ou, puisque $2\alpha = \dfrac{c + b \cos A}{\cos \theta}$,

$$\sin \theta = \frac{b \sin A}{2\alpha}, \text{ et } \cos \theta = \frac{c + b \cos A}{2\alpha} \quad (82)$$

soit ε l'angle que fait la médiane α avec la bissectrice de l'angle A; on a

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2} A - \theta\right), \text{ et } \quad 2\alpha \cos \varepsilon = (b + c) \cos \frac{A}{2}.$$

Donc

$$OK^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{4}{9} \alpha^2 - \frac{4}{3} \alpha \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \cos \varepsilon$$

$$= \frac{bc + ab + ac}{3} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} - 4Rr \quad (83)\,*$$

Mais nous avons trouvé (form. 11 et 12)

$$2p^2 - 2r^2 - 8Rr = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$2p^2 + 2r^2 + 8Rr = 2(bc + ab + ac).$$

Donc

$$4Rr = \frac{bc + ab + ac}{2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - r^2 \quad (84)$$

Substituant cette valeur dans l'expression précédente, on trouve

$$\omega K^2 = \frac{5}{36} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{6} (bc + ac + ab) + r^2 \quad (85)$$

---

* Pour obtenir ces transformations, on remarque que l'on a

$$\frac{r}{\sin \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{bc(p - a)}{p}}$$

On a par suite

$$\overline{\omega K}^2 = \frac{bc(p - a)}{p} + \frac{4}{9} \alpha^2 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{bc(p - a)}{p}} (b + c) \cos \frac{A}{2}, \text{ et}$$

en remplaçant $4\alpha^2$ par sa valeur (v. n° 28, la formule qui précède 78), on a

$$\omega K^2 = bc - \frac{abc}{p} + \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2) - \frac{1}{3} (b + c)(b + c - a)$$

Si l'on remplace abc par $4pRr$, on a la formule (83).

De même, en faisant les substitutions nécessaires, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}\Omega K^2 &= \frac{5}{36}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{6}(ca+ab-bc)+r'^2\\ \Omega' K^2 &= \frac{5}{36}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{6}(ab+bc-ac)+r''^2\\ \Omega'' K^2 &= \frac{5}{36}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{6}(bc+ca+ab)+r'''^2\end{aligned}\right\}\quad(86)$$

En ajoutant ces expressions, on trouve

$$\omega K^2 + \Omega K^2 + \Omega' K^2 + \Omega'' K^2 = \frac{5}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 \qquad (87)$$

Mais nous avons vu (form. 68) que

$$r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Donc, en éliminant les rayons, on trouve

$$\omega K^2 + \Omega K^2 + \Omega' K^2 + \Omega'' K^2 = 16R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (88)$$

31. *Trouver une expression pour la distance du centre de gravité au centre du cercle circonscrit.*

Prenons le triangle dont les sommets sont O, K et le milieu de la base; les côtés de ce triangle sont OK, R cos A, $\frac{\alpha}{3}$, et le cosinus de l'angle opposé à OK est $\frac{h}{\alpha}$. Donc on a

$$OK^2 = \frac{\alpha^2}{9} + R^2\cos^2 A - \frac{2}{3}\alpha R\cos A \,.\, \frac{h}{a} \qquad (89)$$

En remplaçant α^2 par sa valeur, et $\cos^2 A$ par $1 - \sin^2 A$, puis $2Rh$ par bc, et enfin cos A par sa valeur, on trouve

$$OK^2 = R^2 - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{9} \qquad (90)$$

En comparant avec la valeur de OH trouvée précédemment (form. 60), on trouve le résultat connu

$$OH = 3OK \qquad (91)$$

(A suivre.)

NOTE SUR LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS

Par M. Maurice d'Ocagne.

On peut souvent, en arithmétique, à l'aide de petits artifices, apparemment de peu d'importance, apporter de notables simplifications dans les calculs. En voici un exemple assez curieux:

Soit à effectuer la soustraction de deux fractions ayant des termes assez considérables, mais tels que la différence des termes de chacune des fractions soit relativement petite. On obtient le dénominateur par la règle connue. Quant au numérateur, si on veut l'obtenir par la règle ordinaire on sera conduit à des calculs longs et pénibles, car on aura à multiplier le numérateur de chaque fraction par le dénominateur de l'autre, nombres assez grands par hypothèse.

Mais soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, les fractions considérées; on a pour la différence: $\Delta = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

ajoutons et retranchons ac au numérateur, il vient:

$$\Delta = \frac{ad - ac - bc + ac}{bd} = \frac{a(d - c) - c(b - a)}{bd}$$

d'où la règle: *Étant proposé de soustraire une fraction d'une autre fraction, pour trouver le numérateur du reste, on multipliera le numérateur de la première fraction par la différence des deux termes de la seconde; le numérateur de la seconde, par la différence des deux termes de la première, et la différence de ces deux produits sera le numérateur cherché.*

Les calculs sont ainsi notablement simplifiés : car, par hypothèse, les différences $d - c$ et $b - a$ sont peu considérables. L'énoncé de cette règle a été donné par M. Bardel dans les *Comptes rendus* (t. I, 1835, p. 44).

Dans le cas particulier où les deux fractions sont telles que les différences $b - a$, $d - c$ soient toutes deux égales à l'unité, on est conduit à ce théorème assez remarquable:

Dans la soustraction de deux fractions, telles que chaque dénominateur surpasse le numérateur correspondant d'une unité, le numérateur de la différence est égal à la différence des numérateurs.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

Examens oraux 1879.

Étant donnée une demi-circonférence dont AB est le diamètre, on mène le rayon OC perpendiculaire à AB et par le point A une corde AMN qui rencontre la circonférence en M et la droite AC en N; on demande de déterminer AMN de façon que l'on ait :

1° AM = MN; 2° AM = NO.

— On donne un quadrant OAB; on mène la droite MN perpendiculaire à OA, aux deux tiers de OA à partir de O. Trouver le rapport des deux surfaces dans lesquelles MN partage le quadrant.

— Résoudre l'équation $\sin 2x = 3 \cos 3x$.

— Inscrire dans un cercle un triangle isocèle connaissant la somme de la base et de la hauteur.

— Résoudre l'équation $\operatorname{tg}(x + \alpha) = 2 \operatorname{tg}(x - \alpha)$

— Si N est pair, $N(N^2 - 4)$ est divisible par 48.

— Calculer à un millième près le rapport des deux surfaces dans lesquelles la corde du quadrant divise la surface d'un cercle.

— On donne un demi-cercle; on le divise en trois arcs dont les deux premiers sont égaux; on connaît les cordes, et on demande le rayon.

— Condition de divisibilité de $x^m + a^m$ par $x^3 + a^3$.

— On a l'équation $\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} = \sqrt{b}$, dans laquelle les signes sont mis en évidence. La résoudre et vérifier les racines.

— Dans un carré, on sait que la somme du côté et de la diagonale est de 100 mètres; calculer le côté à un centimètre près.

— Résoudre l'équation $\dfrac{a^2}{x^2 - a^2} + \dfrac{b^2}{x^2 - b^2} = 1$.

— On a le nombre 3,125; on veut savoir par quel nombre il suffit de le multiplier pour que le produit soit entier.

— Le rayon d'un cercle est 50^m. Calculer la surface à un décimètre carré près.

— Un mobile partant d'un point A d'une circonférence, parcourt la circonférence en 12 heures; un autre partant du même point la parcourt en sens contraire en 13 heures. Au bout de combien de temps leur distance sera-t-elle de 120°?

— On donne un triangle ABC. Trouver sur AB un point M tel que si l'on mène la transversale MN, parallèle à BC, la ligne MN soit moyenne proportionnelle entre MA et MB.

— Si l'on veut trouver tg $\frac{a}{4}$ en fonctions de cos a, combien trouvera-t-on de solutions? Former l'équation qui donnera tg $\frac{a}{4}$ en fonctions de cos a.

— Résoudre l'équation $\cos 2x + 2 \sin x = m$.

— Résoudre $\frac{x^2}{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{x^2 - b^2} = n + 1$.

Démontrer que les racines sont toujours réelles.

— Calculer à 0,001 l'expression $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{8}$

— Expliquer pourquoi on ne trouve qu'une valeur pour la tangente de la somme des deux arcs en fonction des tangentes de ces deux arcs, tandis qu'on trouve deux valeurs pour le cosinus de la somme en fonction des cosinus des deux arcs.

— On donne une demi-circonférence et une perpendiculaire CD au diamètre AB, extérieure à la circonférence. On demande de trouver sur la courbe un point M qui soit également distant du point A et de la droite CD.

— On a deux fractions dont les dénominateurs sont premiers entre eux; démontrer que si les deux fractions sont irréductibles, leur somme est irréductible.

— On donne un triangle ABC ; on inscrit un carré MNPO dans ce triangle, en appuyant la base sur BC ; puis un carré dans le triangle AMN, et ainsi de suite. Trouver la limite de la somme de tous ces carrés.

— Reste de la division d'un nombre par 99.

— Calculer à 0,01 l'expression

$$(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{27})^2.$$

— On donne deux parallèles AD, BC, et un point P sur leur plus courte distance AB. Mener par le point P la droite PCD, qui rencontre BC en C et AD en D, de telle manière que CD soit moyen proportionnel entre AD et BC.

— Combien trouvera-t-on de valeurs pour sin $4a$ en fonction de sin a?

— On donne un triangle ABC. Trouver sur AB un point M tel que si l'on mène la transversale MN parallèle à BC, puis NP parallèle à AB, le parallélogramme inscrit BMNP ait une surface donnée.

— On donne une demi-circonférence AB; on mène un rayon OM, incliné de 60° sur OB, qui rencontre en T la tangente BT. On demande de trouver la surface du triangle mixtiligne BMT.

— Dans le problème précédent, on suppose l'angle on O égal à α; calculer le rayon du cercle inscrit dans le triangle mixtiligne BMT.

— Calculer à 0,01 l'expression

$$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}.$$

— Le diamètre apparent du soleil est de 32′ Calculer la distance de la terre au soleil en prenant pour unité le rayon du soleil.

— Si $\frac{A}{B}$ est irréductible, la somme $\frac{A}{B} + \frac{A^2}{B^2}$ ne peut pas être un nombre entier. — Examiner ce qui arriverait pour la somme des termes d'une progression géométrique décroissant indéfiniment, dont le premier terme serait $\frac{A}{B}$, et la raison $\frac{A}{B}$.

— On donne une demi-circonférence AB; on mène une corde AC faisant l'angle x avec le diamètre AB, et le rayon OD parallèle à AC. Déterminer l'angle x de façon que le trapèze ACDO ait un périmètre maximum.

— L'angle MAN est droit; déterminer la sécante MPN, passant par un point P donné, de façon que la surface MAN soit donnée. Même question si l'angle A a une valeur donnée α, moindre que 90°.

— Deux nombres différents sont terminés par 6; quelle est la condition pour que leur produit soit terminé par 36.

— Résoudre le système: $x^2 + y^2 = m^2$

$$(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = a^2b^2$$

— Reste de la division par 9 de 43^{20}.

— Les deux progressions:

$$1 : 1{,}01 : (1{,}01)^2 : (1{,}01)^3 \ldots\ldots$$
$$0.\ 0{,}01.\ 0{,}02.\ 0{,}03 \ldots\ldots$$

définissent un système de logarithmes. Trouver la base de ce système.

— On donne une demi-circonférence et un point M sur le diamètre AB; AM $= d$; on mène MP perpendiculaire à AB; mener par le point A une sécante telle que la portion comprise entre MP et la circonférence soit égale à l.

— Calculer à 0,001 l'expression

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{7}}{\sqrt{2} + \sqrt{8}}\right)^2.$$

— On donne un angle yox, et un point P à l'intérieur. Mener par le point P deux droites rectangulaires rencontrant Ox en M et Oy en N, et telles que PM = PN. On prendra l'angle OPM comme inconnu.

— Dans un quadrilatère inscrit on donne les quatre côtés; on prolonge deux côtés opposés; trouver les longueurs des lignes ainsi prolongées.

— Résoudre l'équation

$$x^2 - 4x \sin\alpha + 3 \cos\alpha = 0.$$

— Calculer à 0,001 près l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{8}}$$

— On connaît $\sin x = 0{,}754$. Calculer avec toute l'approximation possible $\operatorname{tg} x$. — Si l'on avait une table de logarithmes, comment trouverait-on une limite de l'erreur commise dans le calcul de l'angle.

— On a un rectangle ABCD. Trouver sur le côté CD un point M tel que

$$\frac{AM^2}{CM^2 + DM^2} = K^2.$$

— Éliminer x entre $\sin x + \cos x = m$
$\sin^3 x + \cos^3 x = n$

— Combien de valeurs peut avoir $\cos \frac{a}{4}$ en fonction de $\sin \alpha$?

— On a un cercle et un point P extérieur au cercle; on mène PMN faisant un angle α avec OP. 1° Trouver l'équation qui donne PM et PN. 2° Si on abaisse MQ et NQ′ perpendiculaires sur OP, trouver l'équation qui donne MQ et NQ′; 3° Déterminer l'angle α de façon que MQ + NQ′ soit égal à une quantité K. — Discuter.

— Étant donné un triangle rectangle ABC, on demande de déterminer l'angle C de façon que, si l'on mène AD perpendiculaire sur l'hypoténuse, DE perpendiculaire sur AC, EF perdendiculaire sur l'hypoténuse et ainsi de suite, la somme de toutes ces perpendiculaires soit égale au périmètre.

— Dans une racine carrée, on prend pour valeur $a + \frac{r}{2a}$; quelle est la limite de l'erreur commise?

— Condition pour que les deux équations

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + p'x + q' = 0$$

aient une racine commune.

— Dans un triangle on connaît les angles; on demande d'évaluer les angles que fait la médiane avec les côtés qui la comprennent.

— Étant données deux équations du second degré, trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients pour que les quatre racines forment une proportion.

— Minimum de $tg^2x + 16 \cos^2 x$.

CONCOURS GÉNÉRAL 1879

Mathématiques spéciales.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point dans le plan du cercle de gorge. Par ce point, on mène une droite parallèle à une génératrice de la surface. Cette droite est l'axe d'un cylindre de révolution qui passe par la génératrice de l'hyperboloïde. Trouver l'équation de la projection sur le plan des xy de l'intersection des deux surfaces. La projection a un point double dont on demande le lieu lorsque la droite varie.

Mathématiques élémentaires.

1. On considère un quadrilatère ABCD dans lequel AB = BC et CD = DA. On demande de prouver que ce quadrilatère est circonscriptible à deux cercles. On déforme ce quadrilatère de manière que les côtés demeurent invariables, et que les points A et B demeurent fixes. On demande le lieu des centres des cercles inscrits aux différentes positions du quadrilatère.

2. Etant données les deux équations :

$$ax + by + cz = 0$$
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

en déduire les rapports $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$ par des formules ne contenant pas de radicaux au dénominateur. Chercher dans quel cas les valeurs de ces rapports sont réelles.

Rhétorique.

— Soit AB une portion de droite de longueur donnée; on prend, entre A et B, sur la droite AB, un point C, et sur AC comme diamètre, on décrit une demi-circonférence; par le point B, on mène une tangente à cette demi-circonférence. Soit D le point de contact et soit E le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite AB par le point A.

Déterminer le point C de telle façon que si l'on fait tourner autour de la droite AB, la surface engendrée par l'arc de cercle AD et la surface engendrée par la portion de droite BE soient dans un rapport donné m. Indiquer la condition de possibilité; appliquer dans le cas particulier où m est égal à $\frac{1}{2}$, et dans ce cas, trouver le rapport des surfaces engendrées par les deux portions BD et DE de la droite BE.

— Longitude et latitude d'un point de la surface de la terre. Manière de les déterminer. Forme du méridien terrestre.

Classe de troisième.

— On donne un cercle et une tangente en A. On mène un diamètre quelconque BC et on abaisse les perpendiculaires BB′ et CC′ sur la tangente. Démontrer que le rapport de l'aire du triangle ABC à l'aire du trapèze BB′CC′ est le même quel que soit le diamètre.

— Soit I le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC; on prend les points A′, B′, C′ respectivement symétriques du point I par rapport aux côtés BC, AC, AB. 1° Démontrer que les triangles ABC, A′B′C′ sont inscriptibles dans un même cercle; 2° évaluer les angles du triangle A′B′C′ en supposant connus ceux du triangle ABC; 3° les deux triangles se coupent suivant les sommets d'un hexagone ; démontrer que les lignes qui joignent les sommets opposés de cet hexagone se coupent en un même point (dans chaque partie de la dernière question, on examinera séparément les cas où les trois angles du triangle ABC sont aigus, et celui où l'un des angles est obtus).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION EN 1879.

Mathématiques.

— On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

et un point M sur cette conique. Par les extrémités d'un diamètre quelconque de la conique et le point M on fait passer un cercle; prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique K passant par l'origine O des axes. Si autour du point O, on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique K en deux points; prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpendiculaire au segment OM, et passant au milieu de ce segment. Par le point O, on peut mener, indépendamment de la normale ayant son pied en O, trois autres droites normales à la conique K. 1° Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère, et où $a = 1$, $b = -1$, montrer qu'une seule de ces normales est réelle; 2° trouver

l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds des trois normales.

Nota. — Le pied de la normale est le point de la courbe d'où part la normale.

Géométrie descriptive.

On donne un cube dont l'arête a 12 centimètres, et qui a sa base dans le plan horizontal. Le point A est sur la ligne de terre, et AB fait un angle de 30° avec la ligne de terre. On mène la verticale du centre du cube. C'est l'axe d'un hyperboloïde de révolution ayant pour génératrice la diagonale BK d'une face latérale. Le sommet E, qui se projette horizontalement en A, est le sommet d'un cône de révolution dont l'axe passe par le milieu de l'arête verticale KC. Le milieu de l'arête horizontale KH (qui se projette suivant BC), est un point de la surface. On demande: 1° de trouver la courbe d'intersection des deux surfaces; 2° de représenter l'hyperboloïde supposé plein, en enlevant la partie située à l'intérieur du cône.

ÉCOLE CENTRALE

CONCOURS DE 1879. — PREMIÈRE SESSION.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires, Ox et Oy, et un point A sur Ox, un point B sur Oy.

1° Former l'équation générale des hyperboles équilatères tangents à l'axe Ox au point B, et passant par le point A.

2° Lieu des points de rencontre des tangentes à ces hyperboles au point A, avec les parallèles aux asymptotes menées par le point O.

3° Ce lieu est une parabole; trouver l'équation de l'axe et de la tangente au sommet; construire géométriquement le paramètre de cette parabole.

4° Trouver le lieu du sommet de cette parabole lorsque le point A se déplace sur l'axe Ox.

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle, on donne les trois côtés

$$a = 3457^{m}205$$
$$b = 5819^{m}798$$
$$c = 7005^{m}002$$

trouver les trois côtés et la surface de ce triangle.

Physique et chimie.

1. — Un tube barométrique terminé par un renflement cylindrique de 0,05 de hauteur plonge dans une cuve à mercure. Il renferme de l'air raréfié qui occupe exactement le volume du renflement lorsque la différence

de niveau entre les deux surfaces de mercure est de 0,12 et lorsque la pression atmosphérique est de 0,75. On soulève verticalement ce tube jusqu'à ce que la section inférieure du renflement soit à 0,43 au-dessus du niveau supposé constant du mercure dans la cuve. Quelle est alors la différence de niveau des deux surfaces dans le tube et dans la cuve? Le rapport des rayons des deux parties du tube est de 1 à 2.

3. — Préparation et propriétés chimiques de l'acide sulfhydrique. Calculer la densité théorique de la vapeur de soufre, connaissant la composition de l'acide sulfhydrique.

Densité de l'hydrogène $d = 0,0692$
Densité de l'acide sulfhydrique $d' = 1,1912$

Géométrie descriptive.

Hyperboloïde de révolution entaillé par un cône.

L'axe (z, z') de l'hyperboloïde est vertical, à 100 millimètres du plan vertical, et au milieu de la feuille. Le cercle de gorge (c, c') dont la cote vaut $0^m,080$ à $0^m,030$ de rayon, et les génératrices rectilignes de la surface font avec l'horizon un angle de 45°.

Le cône, dont le sommet (s, s') se trouve dans le plan de profil conduit par l'axe (z, z'), à 0,050 en avant de cet axe, et à 0,040 au-dessus du cercle de gorge, a pour trace horizontale le cube ω décrit du point z comme centre avec un rayon égal à 0,070. On demande de représenter l'hyperboloïde, supposé plein, et limité d'une part au plan horizontal P', à la cote 0,190, et de l'autre au plan horizontal de projection, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône. On indiquera, à l'encre rouge, les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection des surfaces données et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0,228 du petit côté supérieur.

ÉCOLE FORESTIÈRE

CONCOURS DE 1879.

Composition mathématique.

On circonscrit à une sphère donnée un tronc de pyramide régulière dont les bases sont des octogones réguliers. Déterminer le volume de ce tronc en fonction du rayon de la sphère et de l'inclinaison de ses faces latérales sur la grande base et le minimum de ce volume quand on fait varier l'inclinaison.

En supposant que le carré du rayon de la sphère soit égal à 3 centiares, et que cette inclinaison soit de 75°, on déterminera ce volume à 1 millième près : 1° sans le secours des logarithmes avec le plus petit nombre de décimales possible ; 2° avec le secours des tables de logarithmes.

Composition en trigonométrie.

Dans un triangle ABC, le côté AB a une longueur de 169 toises, et la bissectrice de l'angle A, prolongée jusqu'au côté BC, a une longueur de 137 toises : l'angle B, augmenté de la moitié de l'angle A, forme les $\frac{14692}{9153}$ d'un angle droit.

Calculer les angles de ce triangle à un centième de seconde près, ses côtés à un dixième de millimètre, et sa surface à un centiare près.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

CONCOURS DE 1879. — COMPOSITION SUPPLÉMENTAIRE

Composition mathématique.

1. — Calculer la valeur de x donnée par la formule,

$$x^3 = \frac{\pi a^3 \operatorname{Sin}^2 \varphi \operatorname{Cos} \varphi}{3}$$

dans laquelle on fait $a = 442^m,375$

$\varphi = 27° \, 28' \, 47''$

π est le rapport de la circonférence au diamètre.

2. — Calculer les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant le produit des trois côtés et la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

3. — Dans le demi-cercle ACDB dont AB est le diamètre, la corde CD est parallèle à AB. On donne les longueurs des cordes AC, CD, BD, et l'on demande de calculer le rayon du cercle. -- Interpréter la solution négative, si l'on en trouve.

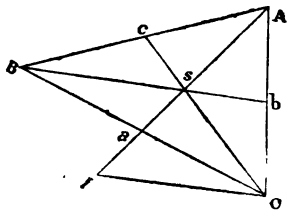
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 130.

Solution par M. Hoc, élève du Collége de Longwy.

Soient menées dans un triangle ABC *par les sommets et le centre de gravité* S, *les droites* AS, BS, CS *rencontrant les côtés opposés en* a, b, c. *Formons avec* Aa, Bb, Cc, *comme côtés, un triangle* MNP. *Les rayons* R, r, r′, r″, r‴ *des cercles circonscrits respectivement aux triangles* ABC, MNP, BCS, CAS, ABS, *satisfont à la relation* $4R^2r = 3r'r''r'''$.

Désignons par m, m', m'' les médianes Aa, Bb, Cc du triangle ABC. Dans tout triangle le rayon R du cercle circonscrit est donné par la formule $R = \frac{abc}{4S}$. Si l'on applique cette formule aux triangles de l'énoncé, on a $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{m\ m'\ m''}{4S'}$. Pour avoir S′ remarquons que, si l'on prolonge Sa d'une longueur égale aI, et que l'on joigne CI, le triangle CIS ayant pour côtés les deux tiers des médianes est semblable au triangle MNP et leur rapport de similitude est $\frac{2}{3}$. Donc surf. MNP $= \frac{9}{4}$ surf. ICS. Et comme surf. ICS = surf. BSC $= \frac{1}{3}$ surf. ABC, on a finalement



$$r = \frac{mm'm''}{3S}$$

Dès lors $$4Rr^2 = \frac{abc\ .\ m^2\ .\ m'^2m''^2}{9S^3}$$

On trouverait de même

$$r' = \frac{am'm''}{3S},\quad r'' = \frac{bmm''}{3S},\quad r''' = \frac{cmm'}{3S}.$$

Donc $$3r'r''r''' = \frac{abcm^2\ .\ m'^2\ .\ m''^2}{9S^3} = 4Rr^2.$$

Nota. — La même question a été résolue par M. Longueville, à Charleville, et par M. Deslais, du Mans.

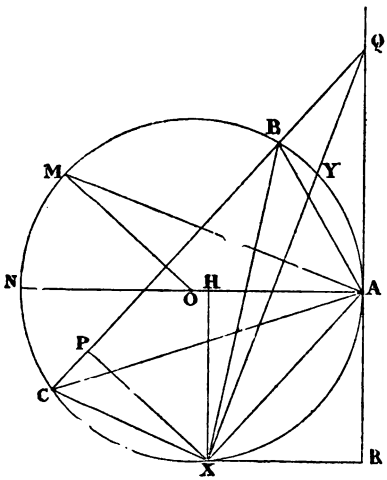
QUESTION 137.

Solution par M. Zuloaga, de Liége.

On inscrit un triangle ABC *dans un cercle ; la tangente en* A *rencontre* BC *en* Q. *Par le point* Q, *on mène une perpendiculaire à la bissectrice de l'angle* A, *perpendiculaire qui coupe le cercle*

en des points X *et* Y ; *démontrer que la distance de l'un de ces points au point* A *est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux points* B *et* C.

Soit AM la bissectrice de l'angle A, et QX la perpendiculaire menée du point Q à cette bissectrice. Je dis en premier lieu que QX est la bissectrice de l'angle AQC. En effet, si je joins le centre O de la circonférence, aux points A et M (M étant, comme on sait, le point milieu de l'arc BC), j'ai : OAM = AMO. Mais OAM = AQX, comme ayant les côtés perpendiculaires ; de même AMO = XQC, donc AQX = XQC. Du point X, je mène XP, hauteur du triangle BXC ; si j'appelle D le diamètre du cercle, j'aurai BX . XC = D . XP. De même si du point X je mène XH perpendiculaire au diamètre AN, j'aurai



$$\overline{AX}^2 = AN \,.\, AH, \text{ ou bien } \overline{AX}^2 = D \,.\, AH.$$

Je prolonge AQ, et par le point X, je mène XR perpendiculaire à QA ; j'ai RX = AH comme parallèles comprises entre parallèles, or RX = XP, car le point X appartient à la droite QX bissectrice de l'angle RQC ; on conclut donc de là que

$$\overline{AX}^2 = BX \,.\, XC.$$

Remarque. — Généralisation de la question 137.

Si on inscrit un quadrilatère ABCD dans un cercle, et qu'on mène la bissectrice de l'angle formé par les prolongements des côtés opposés AB, DC, laquelle bissectrice coupe la circonférence en des points X et Y, on aura :

$$AX \,.\, XB = XC \,.\, XD.$$

En effet, si je mène la hauteur XN du triangle CXD, et que j'appelle D le diamètre du cercle, on aura

$$XC \,.\, XD = D \,.\, XN.$$

De même, menons la hauteur XM du triangle BXA, nous aurons $AX \cdot XB = D \cdot XM$.

Or le point X étant sur la bissectrice, on a $XN = XM$, donc $XC \cdot XD = AX \cdot XB$.

Nota. — Ont résolu la même question: MM. Hoc, de Longwy; Dumotel, élève du Lycée Saint-Louis; Deslais, au Mans.

QUESTION 138.

Solution par M. Hoc, élève du Collége de Longwy.

Si l, m, n *sont les médianes d'un triangle, démontrer que sa surface a pour expression*

$$\frac{2abc}{a+b+c} \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \qquad (1)$$

ou $$\frac{1}{3}\sqrt{2l^2m^2 + 2l^2n^2 + 2m^2n^2 - l^4 - m^4 - n^4} \qquad (2)$$

Démontrons d'abord la formule (1)

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{2\,abc\,[\sin A + \sin B + \sin C]}{4(a+b+c)}$$

Or de l'égalité $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, on tire

$$2R = \frac{a+b+e}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Portant cette valeur dans (1) on trouve $\frac{abc}{4R}$, c'est-à-dire la surface du triangle.

Quant à la démonstration de la formule (2), on y arrive facilement en remarquant que la quantité sous le radical peut se mettre sous la forme

$$(l+m+n)\,(l+m-n)\,(m+n-l)\,(n+l-m).$$

L'expression (2) représente donc les $\frac{4}{3}$ de la surface du triangle qui aurait pour côtés les longueurs l, m, n. Construisons ce triangle (PQR), ainsi que celui dont les médianes sont l, m, n (ABC). Dans le triangle ABC, prolongeons d'un tiers la médiane $AL = l$ et joignons C au point G ainsi obte-

nu. Le triangle GOC (O étant le point de concours des médianes) a pour côtés les $\frac{2}{3}$ des médianes; il est donc semblable à PQR et sa surface est égale aux $\frac{4}{9}$ de celle de ce dernier. Or elle est aussi équivalente à surface BOC, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ ABC, par suite

$$\text{surf. ABC} = \frac{4}{3}\,\text{PQR}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2\,l^2m^2 + 2\,l^2n^2 + 2\,m^2n^2 - l^4 - m^4 - n^4}$$

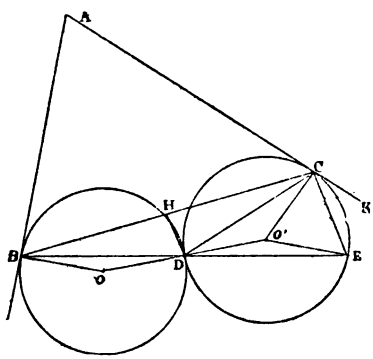
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Schmitz, de la Rochelle ; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saunier ; Gélinet, d'Orléans ; du Motet, élève du lycée Saint-Louis; Elie, collége Stanislas; Moles, d'Angoulême; Vermand, à Saint-Quentin; Hugot, de Lyon.

QUESTION 145.

Solution, par M. Lannes, élève du Lycée de Tarbes.

On donne un point sur chacun des côtés d'un angle; construire deux circonférences égales tangentes entre elles et touchant chacune un des côtés de l'angle au point donné.

Supposons le problème résolu : soient O et O′ les deux cercles tangents en B et C aux deux côtés de l'angle A, et D leur point de contact : tirons CD, BD que nous prolongeons jusqu'à sa rencontre en E avec la circonférence O′, BC, BO, CE et EO′.



Les deux triangles BOD, DO′E sont égaux : il s'ensuit que EO′ est perpendiculaire à AB; l'angle CO′E est donc égal à l'angle A comme ayant ses côtés respectivement perpendiculaires à A B et à AC, et l'angle

BDC, supplémentaire de l'angle CDE qui est la moitié de CO'E, a pour supplément la moitié de l'angle A : on connaît ainsi un premier lieu du point D.

Menons DH parallèle à CE : l'angle ECK étant égal à $\frac{A}{2}$, DH est parallèle à la bissectrice de l'angle A, et de plus, comme on a, $\frac{BH}{HC} = \frac{BD}{DE} = 1$,

le point H est le milieu de BC.

On a ainsi un second lieu du point D.

On peut donc construire le point D : ce point connu, la construction s'achève facilement.

Nota. Ont résolu la même question : MM. Deslais, au Mans; Trehoret, au Havre; Renaud, à Bordeaux; Dupuy, à Grenoble; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier; Vazou, au collége Rollin; Faissey, Baudot, à Dijon.

QUESTIONS PROPOSÉES

181. — Étant données une circonférence o et deux droites concourantes xy, $x'y'$ dont le point de concours n'est pas dans les limites du dessin, mener à la circonférence une tangente passant par le point de rencontre de xy et de $x'y'$.

182. — Soit donné un cercle o, de rayon r, inscrit dans un angle; on mène les deux cercles o' et o'' tangents aux côtés de l'angle et au cercle o, puis les cercles ω, ω' tangents à l'un des côtés et en même temps tangents respectivement à o, o' et à o, o''. Démontrer que, x et y étant les rayons des cercles ω et ω', on a la relation

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{r}.$$

183. — Prouver que $(a - b)\sqrt{ab}$ est divisible par 24 si ab est un carré parfait et que a et b soient de même parité.

(Bernheim.)

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 15056-9.

THÉORIE DES CENTRES

DES MOYENNES HARMONIQUES

Par M. Kœhler.

(*Suite.* Voir page 257.)

7. **Théorème.** — *Le centre* q *des moyennes harmoniques d'un groupe de* n *points* a, b, c... *par rapport à un point ou pôle* p *est un point unique et déterminé; mais si* q *est considéré comme un centre de moyennes harmoniques des mêmes points* a, b, c... *par rapport à un pôle inconnu, il correspond à* n — 1 *pôles différents.*

Désignons par a, b, c . . . les distances qa, qb, qc . . . rapportées au point q pris pour origine, et posons $qp = x$; on aura $pa = qa - qp = a - x$, $pb = b - x$, etc. L'équation (6) devient

$$\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} + \frac{c}{c-x} + \ldots = 0.$$

En chassant les dénominateurs, on obtient évidemment une équation de degré $n - 1$ pour déterminer x, ce qui démontre le théorème (nous supposons connue cette propriété qu'une équation de degré $n - 1$ admet $n - 1$ racines).

En particulier, s'il y a trois points a, b, c on aura $x^2(a + b + c) - 2x(bc + ca + ab) + 3abc = 0$.

Si l'on suppose $a + b + c = 0$, le point origine q est le centre des moyennes distances des points a, b, c, une des valeurs de x devient infinie, ce qui devait être, puisque le centre des moyennes distances n'est autre chose que le centre des moyennes harmoniques par rapport au point à l'infini. Mais il y a un point à distance finie

$$x = \frac{3abc}{bc + ca + ab} = \frac{3ab(a+b)}{2(a^2 + b^2 + ab)}$$
$$= \frac{3ab(a^2 - b^2)}{2(a^3 - b^3)}.$$

par rapport auquel l'origine est centre des moyennes harmoniques.

Centre des moyennes harmoniques déduit du centre des distances proportionnelles.

8. Supposons que les n points en ligne droite, A, B, C ... considérés dans ce qui précède, soient affectés de coefficients numériques α, β, γ ...; on sait que le centre des distances proportionnelles est un point Q qui satisfait à la relation $OQ = \frac{\alpha.OA + \beta.OB + \ldots}{\alpha + \beta + \ldots}$; O étant une origine arbitraire. On retrouve le centre des moyennes distances, lorsqu'on suppose les coefficients égaux entre eux. Si l'on construit le faisceau S (P, A, B, ... Q), et si on le coupe par une transversale $pab \ldots q$, on aura

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \ldots}{pq} = \frac{\alpha}{pa} + \frac{\beta}{pb} + \frac{\gamma}{pc} + \ldots$$

Cette relation se démontre absolument comme la relation

$$\frac{n}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \ldots$$

à laquelle elle se ramène par l'hypothèse $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$, et le point q pourra être appelé encore centre des moyennes harmoniques de a, b, c, ... par rapport au pôle p. La droite Sq sera l'axe des moyennes harmoniques de Sp par rapport aux droites Sa, Sb, Sc, ..., affectées respectivement des coefficients α, β, γ, ...

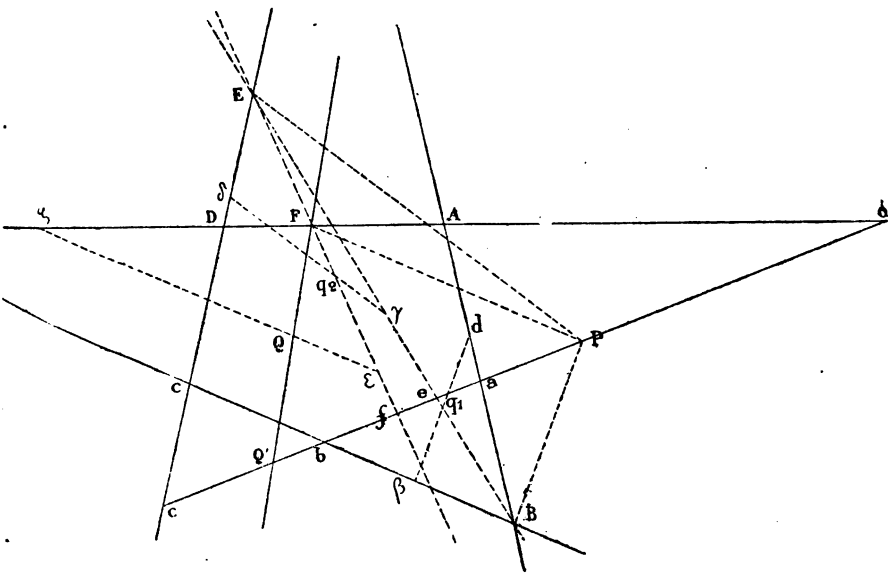
Il est aisé de voir comment on pourra construire l'axe relatif à Sp par rapport aux droites Sa et Sb dont les coefficients sont α, β. On mènera AB parallèle à Sp et on partagera cette droite en deux segments AQ, QB, tels que l'on ait $\frac{AQ}{QB} = \frac{\beta}{\alpha}$; il est évident que SQ sera l'axe cherché.

Cette remarque va nous permettre de démontrer sans difficulté le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné un système de* n *droites quelconques dans un plan et un pôle* P, *si l'on mène une transversale quelconque par le pôle et qu'on cherche le centre des moyennes harmoniques de* P *par rapport aux points où elle coupe les* n

droites (supposées affectées du même coefficient ou de coefficients différents), le lieu des centres sur toutes les transversales est une droite, polaire rectiligne du point P.

Soient AB, BC, CD, DA quatre droites ; je prends la polaire du point P par rapport aux deux premières, en menant $\alpha\beta$ parallèle à PB et joignant le point B au milieu q, de $\alpha\beta$. Bq coupe la troisième droite CD en E. Je prends l'axe des moyennes harmoniques de PE par rapport à EC, EB en



regardant ces deux droites comme affectées des coefficients 1 et 2 ; pour cela je mène $\gamma\delta$ parallèle à PE et je partage le segment $\gamma\delta$ au point q_2 de telle sorte qu'on ait $\frac{\delta q_2}{q_2\gamma} = \frac{2}{1}$. Il est clair que E$q_2$ sera la polaire rectiligne de AB, BC, CD ; en effet, si je mène une transversale arbitraire Pabc ... qui rencontre Bq_1, Eq_2 aux points e, f, j'aurai $\frac{2}{\mathrm{P}e} = \frac{1}{\mathrm{P}a}$ $+ \frac{1}{\mathrm{P}b}$, $\frac{3}{\mathrm{P}f} = \frac{2}{\mathrm{P}e} + \frac{1}{pc} = \frac{1}{\mathrm{P}a} + \frac{1}{\mathrm{P}b} + \frac{1}{\mathrm{P}c}$.

La droite Eq_2 coupe DA en F ; je cherche l'axe des moyennes

harmoniques de Fq_2 et de AD en affectant ces lignes des coefficients 3 et 1 ; pour cela il suffit de mener $\varepsilon\zeta$ parallèle à PF et de partager $\varepsilon\zeta$ au point Q de telle sorte que $\frac{\zeta Q}{Q\varepsilon} = \frac{3}{1}$. FQ sera la polaire rectiligne des quatre droites, d'après la définition indiquée dans l'énoncé du théorème.

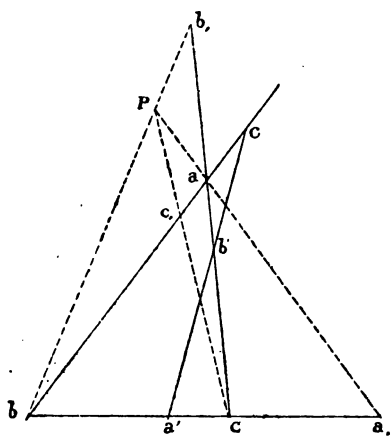
On a effectivement sur la transversale P*abc*...

$$\frac{4}{PQ'} = \frac{3}{Pf} + \frac{1}{Pd} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb} + \frac{1}{Pc} + \frac{1}{Pd}.$$

Les mêmes constructions et le même raisonnemen s'appliquent de proche en proche à un nombre quelconque de droites.

9. Ce qui précède permet d'énoncer le théorème suivant dû à M. Cayley : *Étant données* n *droites et un pôle* P, *le point où l'une de ces droites coupe la polaire rectiligne de* P *par par rapport aux* (n — 1) *autres, appartient à la polaire rectiligne de* P *par rapport aux* n *droites.*

En supposant $n = 3$, on voit que les polaires d'un point par rapport aux côtés d'un triangle pris deux à deux, coupent ces côtés en trois points qui sont en ligne droite et appartiennent à la polaire rectiligne du point par rapport aux trois côtés.



Réciproquement : *Si les trois côtés* bc, ca, ab *d'un triangle sont coupés par une transversale respectivement aux points* a', b', c', *et si* a_1, b_1, c_1 *sont les conjugués harmoniques de* a', b', c' *par rapport aux couples* (b, c), (c, a). (a, b), *les droites* aa_1, bb_1, cc_1 *se coupent en un même point* P, *pôle de la transversale* (*).

(*) Il faut bien remarquer que ce procédé de construction du pôle d'une

10. Le théorème général sur la polaire rectiligne d'un point devient presque intuitif, en invoquant le principe suivant qui résulte des premières notions de géométrie analytique :

Pour reconnaître le degré d'un lieu géométrique, il suffit de chercher le nombre des points de ce lieu situés sur une droite arbitraire ; lorsqu'il y a un seul point, le lieu est une droite. — C'est ce qui arrive dans la recherche de la polaire d'un point par rapport à n droites ou par rapport à une courbe du degré n. Sur chaque transversale issue du pôle on ne trouve évidemment qu'un centre des moyennes harmoniques.

L'application du principe que je viens de rappeler n'est pas toujours aussi facile ; elle exige parfois beaucoup d'attention. Voici un exemple très-simple : on demande le degré du lieu des milieux des cordes d'une conique passant par un point P. Au premier abord il semble qu'il n'y a qu'un point sur chaque corde ; mais le point P lui-même fai partie du lieu, car il est le milieu d'une corde parallèle au diamètre conjugué de OP (O étant le centre de la conique). Le lieu cherché étant coupé par une droite en deux points est du second degré.

(A suivre.)

---

droite donnée par rapport à un triangle n'est pas susceptible de généralisation. S'il s'agit d'un quadrilatère, il faut, pour obtenir le pôle d'une transversale chercher l'intersection de deux courbes du troisième degré qui passent déjà par les six points de concours des côtés deux à deux ; on trouve ainsi trois points. Nous ferons voir dans un autre article que, pour le cas du triangle, on peut résoudre le problème en cherchant l'intersection de deux coniques passant par les trois sommets et qui se coupent encore en un quatrième point, le pôle cherché. — En général, les pôles d'une droite par rapport à un lieu du degré n sont au nombre de $(n-1)^2 - \delta$, en désignant par δ le nombre des points doubles. Si le lieu se compose de n droites, on a $\delta = \frac{n(n-1)}{2}$ et on a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ pôles.

NOTE D'ALGÈBRE

SUR LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

La propriété fondamentale qui sert de définition à la progression arithmétique va nous permettre de calculer très-facilement certaines expressions dans lesquelles entrent des termes en progression arithmétique. Nous désignerons la progression par les termes

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\,.\,.\,.\, h \,.\, k \,.\, l.$$

1. On a

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{r}{ab},$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{r}{bc},$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{l} = \frac{r}{kl}.$$

Ajoutant membre à membre, il vient après réduction

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{l} = r\Sigma\, \frac{1}{ab},$$

en désignant par $\Sigma\, \frac{1}{ab}$ la somme des inverses des produits obtenus en prenant deux termes consécutifs de la progression.

En particulier on aura

$$\frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \frac{1}{4\,.\,5} + \,.\,.\,.\,.$$
$$+ \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

De même on aura

$$\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} = \frac{c-a}{abc} = \frac{2r}{abc}.$$

Donc en opérant comme précédemment

$$\frac{1}{ab} - \frac{1}{kl} = 2r\Sigma\, \frac{1}{abc}.$$

On aura de même

$$\frac{1}{abc} - \frac{1}{hkl} = 3r\Sigma \frac{1}{abcd}$$

et ainsi de suite.

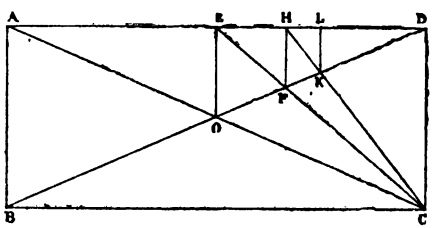
Lorsque le nombre des termes que l'on considère augmente indéfiniment on a une série ; les termes $\frac{1}{l}, \frac{1}{kl}, \frac{1}{hkl} \ldots$ tendent vers zéro. On a donc immédiatement la somme des termes de certaines séries.

En particulier pour n infini, on a

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

M. Bæhr, professeur à l'École polytechnique de Delft, a donné au Congrès de l'Association française, au Havre, en 1877, une représentation géométrique de l'inverse de n nombres entiers consécutifs, et de l'inverse des produits de deux nombres entiers consécutifs.

Considérons un rectangle ABCD; ses diagonales se coupent en O. Menons OE parallèle à AB; la ligne CE coupe



en F la diagonale BD; menons FH parallèle à AB; la ligne HC coupe BD en K: menons KL, et ainsi de suite.

On a d'abord $\qquad DE = \frac{AD}{2}.$

Puis les triangles BFC, EFD donnent

$$\frac{DF}{BF} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2};$$

donc $\qquad \frac{DH}{DA} = \frac{DF}{BC} = \frac{1}{3}.$

En général, si l'on a

$$\frac{DH}{DA} = \frac{1}{n},$$

on en déduit

$$\frac{DK}{BK} = \frac{1}{n}, \text{ et } \frac{DK}{DB} = \frac{DL}{DA} = \frac{1}{n+1}.$$

On a aussi

$$\frac{EH}{AD} = \frac{ED}{AD} - \frac{DH}{AD} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3},$$

$$\frac{HL}{AD} = \frac{HD}{AD} = \frac{LD}{AD} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3.4},$$

et ainsi de suite. On voit donc bien que la somme des termes tels que $\frac{1}{n(n+1)}$ a pour limite l'unité, puisque la somme des termes $AE + EH + HL + \ldots$ est égale à AD.

2. Il existe des formules analogues pour la somme des produits consécutifs des termes d'une progression arithmétique.

Représentons par a_0 le terme qui précéderait, dans une progression indéfiniment prolongée de part et d'autre, le terme a et par l_0 celui qui suivrait l. On trouve facilement

$$\begin{aligned} ab - a_0 a &= 2ra, \\ bc - ab &= 2rb, \\ cd - bc &= 2rc, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ ll_0 - kl &= 2rl. \end{aligned}$$

Ajoutons, nous aurons

$$ll_0 - aa_0 = 2rS.$$

On aurait de même

$$\begin{aligned} kll_0 &= a_0 ab = 3r\Sigma ab \\ hkll_0 &= a_0 abc = 4r\Sigma abc \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

En particulier, on a les formules

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

En général :

Pour avoir la somme des produits obtenus en prenant p *nombres entiers consécutifs à partir de* 1, *on multiplie le dernier produit par le nombre qui suit le dernier facteur et on divise par* p + 1.

Ces formules ont été données sous une forme un peu différente par Pascal et par Fermat.

3. La somme des inverses des produits de deux nombres entiers consécutifs, trouvée précédemment, nous permet de démontrer le théorème suivant, connu sous le nom de Théorème de Goldbach.

La somme de toutes les fractions de la forme

$$\frac{1}{(m+1)^{(p+1)}},$$

dans lesquelles m *et* p *prennent toutes les valeurs entières, positives et plus grandes que zéro, a pour limite l'unité.*

En effet, faisons d'abord varier p ;
pour $m = 1$, on a la série

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$$

dont la somme est $\frac{1}{2^2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$.

En général, pour une valeur particulière de m, on a pour la somme

$$\frac{1}{(m+1)^2} : \frac{m}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)}.$$

Donc la somme donnée est égale à la somme des inverses des produits de deux nombres entiers consécutifs. Elle a donc pour limite l'unité.

A. M.

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods*,

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite*. Voir page 268.)

32. *La somme des carrés des douze lignes menées des sommets d'un triangle aux points de contact des cercles tangents sur les côtés opposés est égale à cinq fois la somme des carrés des côtés du triangle.*

Supposons le côté BC du triangle prolongé en L et N de telle manière que $BL = p - a$, $CN = p - a$; on sait que L et N sont les points extérieurs de contact, et que la distance entre les points intérieurs de contact est $c - b$.

Mais on a $a + p - a + p - a = c + b$.

Soit M le milieu du côté a; alors $AM = \alpha$.

Donc $$AL^2 + AN^2 = 2\alpha^2 + \frac{1}{2}(c + b)^2;$$

$$AF^2 + AF'^2 = 2\alpha^2 + \frac{1}{2}(c - b)^2.$$

Par suite $$AL^2 + AN^2 + AF^2 + AF'^2 = 4\alpha^2 + b^2 + c^2.$$

En faisant des constructions analogues pour les autres côtés, on trouve, pour la somme des douze lignes,

$$4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Mais $$4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Donc, la somme des carrés des douze lignes est égale à

$$5(a^2 + b^2 + c^2).$$

33. *La somme des carrés des douze lignes menées des milieux des côtés d'un triangle aux centres des cercles de contact, augmentée de la somme des carrés des côtés du triangle, donne une somme égale à douze fois le carré du diamètre du cercle circonscrit.*

Appelons α, β, γ les lignes qui joignent les milieux des côtés a, b, c au centre Ω du cercle ex-inscrit opposé à

l'angle A, et δ la distance du milieu de a au centre ω du cercle inscrit; on a

$$\left.\begin{array}{l} B\Omega^2 + C\Omega^2 = 2\alpha^2 + \frac{1}{2}a^2;\ B\omega^2 + C\omega^2 = 2\delta^2 + \frac{1}{2}a^2 \\ A\Omega^2 + C\Omega^2 = 2\beta^2 + \frac{1}{2}b^2;\ A\Omega^2 + B\Omega^2 = 2\gamma^2 + \frac{1}{2}c^2 \end{array}\right\} \quad (92)$$

Ajoutant ces expressions et divisant par 2, on trouve

$$A\Omega^2 + B\Omega^2 + C\Omega^2 + \frac{1}{2}(B\omega^2 + C\omega^2) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2).$$

Mais $A\Omega^2 = r'^2 + p^2$; $B\Omega^2 = r'^2 + (p-c)^2$; $C\Omega^2 = r'^2 + (p-b)^2$;
et $\quad (B\omega^2 + C\omega^2) = 2r'^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2$.

En remplaçant, on obtient

$$\left.\begin{array}{l} 3r'^2 + r^2 + \frac{1}{2}\left[2p^2 + 3(p-b)^2 + 3(p-c)^2\right] \\ = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}(b^2 + c^2) \end{array}\right\} \quad (93)$$

En écrivant les formules analogues pour les autres centres Ω' et Ω'', on trouve, après réduction,

$$3(r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2) + 3(a^2 + b^2 + c^2) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2) + (\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 + \delta''^2) + (a^2 + b^2 + c^2).$$

Mais on a vu (form. 68) que l'on a

$$r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 16R^2.$$

Donc, en substituant, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} 48R^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2) \\ \quad + (\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 + \delta''^2) + a^2 + b^2 + c^2 \end{array}\right\} \quad (94)$$

34. *La somme des aires des quatre triangles formés en joignant trois par trois les points de contact des cercles de contact est constante, et égale au double de l'aire du triangle donné.*

On prendra l'aire du triangle formé en joignant les trois points de contact intérieurs avec le signe négatif. En premier lieu, prenons le triangle dont le sommet est A et la base a, et construisons le triangle dont les sommets sont les points de contact du cercle ex-inscrit avec les côtés a, et les prolongements de b et c. Le double de l'aire de ce

triangle est évidemment

$p^2 \sin A - (p - b)^2 \sin B - (p - c)^2 \sin C - bc \sin A$

Si l'on fait les constructions identiques pour les autres angles B et C du triangle donné, on trouve pour le double des aires des autres triangles,

$p^2 \sin B - (p - c)^2 \sin A - (p - a)^2 \sin C - ac \sin B$

$p^2 \sin C - (p - a)^2 \sin B - (p - b)^2 \sin A - ba \sin C$

si l'on ajoute, en mettant en facteur chaque sinus, on trouve des termes tels que

$$[p^2 - (p - c)^2 - (p - b)^2 - bc] \sin A,$$

qui se réduisent par suite des formules (11) et (12), à

$$(4Rr + r^2) \sin A.$$

En ajoutant on trouve pour le double de la somme des trois triangles extérieurs

$$(4Rr + r^2)(\sin A + \sin B + \sin C);$$

mais (form. 24) $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$;

donc le double de la somme des trois triangles est

$$(4Rr + r^2)\frac{p}{R} = 4rp + \frac{r^2p}{R} \qquad (95)$$

Mais $4rp$ représente quatre fois la surface du triangle donné, et $\frac{r^2p}{R}$ est le double de la surface du triangle dont les sommets sont les points de contact du cercle inscrit.

35. *Dans un triangle quelconque* ABC, *les bissectrices intérieures des angles* A, B, C, *rencontrent les côtés opposés en* A′, B′, C′, *et les bissectrices extérieures de ces angles rencontrent les mêmes côtés en* A″, B″, C″. *Alors, en supposant* $a > b > c$, *on a*

$$\frac{AA''}{A'A''} \cdot \frac{BB''}{B'B''} \cdot \frac{CC''}{C'C''} = \frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{8R^2(a + b + c)} \qquad (96)$$

On a $\frac{c}{b} = \frac{BA'}{CA'}$, ou $(c + b) = \frac{ac}{BA'}$.

Mais le triangle A′AA″ est rectangle; donc

$$\text{Cos}AA''B = \frac{AA''}{A'A''} = \sin AA'B.$$

Mais $$\frac{\sin AA'B}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{c}{BA'}$$

Donc $$(c + b) = \frac{a \sin AAB}{\sin \frac{A}{2}},$$

ou, en remplaçant sin AA'B par sa valeur

$$\frac{c + b}{a} \sin \frac{A}{2} = \frac{AA''}{A'A''}.$$

En prenant les expressions analogues pour les deux autres côtés, et remarquant que l'on a

$$4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{R},$$

on a, en multipliant membre à membre, la formule qu'il s'agit de démontrer.

36. *Trouver une expression pour les côtés, les angles et les surfaces des triangles excentraux* $\Omega\Omega'\Omega''$, $\Omega\omega\Omega'$, $\Omega'\omega\Omega''$, $\Omega''\omega\Omega$.

$BF = p - a$ est la projection de ΩB; donc $\Omega B = \frac{p - a}{\sin \frac{B}{2}}$

De la même manière, on obtient

$$\Omega' B = \frac{p - c}{\sin \frac{B}{2}};$$

Donc $$\Omega B + B\Omega' = \Omega\Omega' = \frac{p - a + p - c}{\sin \frac{B}{2}},$$

ou $$\Omega\Omega' = \frac{b}{\sin \frac{B}{2}} \qquad (97)$$

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; alors $b = 2R \sin B = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$.

Donc $$\Omega\Omega' = 4R \cos \frac{B}{2} \qquad (98)$$

De la même manière

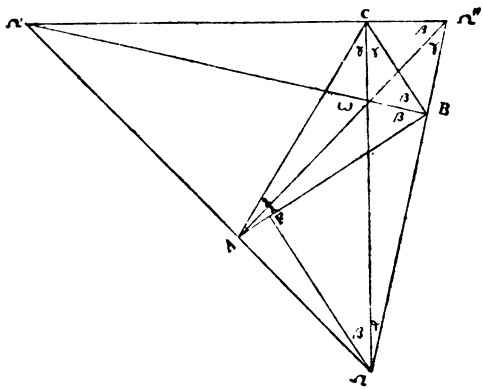
$$\Omega\Omega'' = 4R \cos \frac{A}{2}, \text{ et } \Omega'\Omega'' = 4R \cos \frac{c}{2}.$$

Donc, si P est le demi-périmètre du triangle excentral, on a $$P = 2R\left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}\right) \qquad (99)$$

L'aire de ce triangle est

$$\frac{1}{2} \Omega\Omega' \,.\, \Omega\Omega'' \,.\, \sin \frac{1}{2} (A + B)$$

en substituant on trouve



Aire du triangle excentral

$$= 8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \qquad (100)$$

On sait (36) que l'on a

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C$$

d'autre part,

$$\sin A = \frac{a}{2R} \,;\ \sin B = \frac{b}{2R} \,;\ \sin C = \frac{c}{2R} \,.$$

Donc, on trouve pour l'aire du triangle excentral

$$R(a + b + c) = 2Rp \qquad (101)$$

Cette expression coïncide avec celle que nous avons donnée (52), car ABC est le triangle orthocentrique du triangle excentral $\Omega\Omega'\Omega''$, dont le rayon de cercle circonscrit est $2R$.

37. La surface du triangle excentral est

$$8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \,.$$

et le côté opposé à l'angle Ω' est $4R \cos \frac{1}{2} A$.

Donc la perpendiculaire menée du sommet Ω' sur le côté

opposé est $$4R \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \qquad (102)$$

On trouvera facilement le rayon ρ du cercle inscrit dans le triangle excentral; car le rayon du cercle inscrit est égal à l'aire du triangle divisée par son demi-périmètre. Donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}{4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \qquad (103)$$

38. La projection de $\Omega\omega$ sur le côté a est égale à c. Donc,

$$\Omega\omega = \frac{c}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{2R \sin C}{\cos \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{C}{2} \qquad (104)$$

De même $\Omega'\omega = 4R \sin \frac{A}{2}$; $\Omega''\omega = 4R \sin \frac{B}{2}$.

On en déduit

$$\Omega\Omega'.\Omega\Omega''.\Omega'\Omega''.\Omega\omega.\Omega'\omega.\Omega''\omega = 64R^3abc \qquad (105)$$

Le double de l'aire du triangle $\Omega\omega\Omega'$ est

$$\Omega\omega.\Omega\omega' \sin \frac{1}{2} (A + C).$$

On trouve donc pour cette surface

$$8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \qquad (106)$$

que l'on peut écrire

$$8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)$$

En prenant les expressions analogues pour les trois surfaces qui composent le triangle $\Omega\Omega'\Omega''$, on trouve, pour leur somme

$$8R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right).$$

Mais comme la somme entre parenthèses est égale à 1, on retrouve l'expression déjà indiquée (form. 100).

(A suivre.)

SUR LE MINIMUM

D'UNE EXPRESSION ALGÉBRIQUE A PLUSIEURS VARIABLES.

Par Maurice d'Ocagne

La question que nous nous proposons de traiter ici est la suivante :

Etant données m *fonctions* $X_1, X_2 \ldots X_n$ *de* m — 1 *variables*, x, y, ... t *et de la forme*

$$X_k = a_k x + b_k y + \ldots\ldots + h_k t + l_k$$

trouver le minimum de la somme des carrés de ces fonctions (*).

Etablissons d'abord le lemme suivant :

I. Lemme. — *Si les variables* x, y, ... t *satisfont constamment à la relation* $\alpha x + \beta y + \ldots + \tau t = A$, *le minimum de l'expression* $x^2 + y^2 + \ldots + t^2$ *a lieu pour* $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \ldots = \frac{t}{\tau}$.

Démontrons d'abord le théorème pour le cas de deux variables seulement.

Nous avons $\alpha x + \beta y = B$ (1)

Posons $x^2 + y^2 = \mu$ (2)

De (1) je tire $y = \frac{B - \alpha x}{\beta}$.

Portant dans (2) j'ai

$$x^2 + \left(\frac{B - \alpha x}{\beta}\right)^2 = \mu$$

ou $$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2\alpha B x + B^2 - \beta^2\mu = 0.$$

(*) Cette question a été traitée fort élégamment et d'une manière générale dans les *Nouvelles Annales* (t. XVIII, janvier 1879, p. 23), par le R. P. Le Cointe, S. J., car le Rév. Père prend m *fonctions linéaires à* n *variables*. Mais sa solution très-savante sort du cadre des mathématiques élémentaires.

Remarquons aussi qu'à cette question se rattache celle que M. G. de Longchamps a si bien traitée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (t. II, p. 197).

La condition de réalité des racines de cette équation est

$$\alpha^2B^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(B^2 - \beta^2\mu) \geq 0,$$

ou
$$\alpha^2B^2 \geq \alpha^2B^2 + \beta^2B^2 - \beta^2\mu(\alpha^2 + \beta^2),$$

ou enfin
$$\mu \geq \frac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Le minimum de μ est donc $\dfrac{B^2}{\alpha^2 + \beta^2}$.

Portant cette valeur de μ dans (2), l'équation ainsi obtenue jointe à l'équation (2) donne pour valeurs de x et y:

$$x = \frac{\alpha B}{\alpha^2 + \beta^2} \qquad y = \frac{\beta B}{\alpha^2 + \beta^2},$$

d'où l'on déduit $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{B}{\alpha^2 + \beta^2}$.

Le minimum a donc bien lieu pour $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta}$.

Pour établir le théorème dans toute sa généralité, il nous suffit maintenant de démontrer qu'en prenant, sur un nombre quelconque de variables, deux des variables proportionnelles à leurs coefficients, on diminue la somme des carrés de ces variables.

En effet, attribuons pour le moment aux différentes variables des *valeurs fixes* mais arbitraires, à l'exception de deux d'entre elles, x et y par exemple. Alors dans

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots\ldots + \tau t = A$$

la somme $\gamma z + \ldots\ldots + \tau t$ prend une valeur fixe et on a

$$\alpha x + \beta y = A'.$$

A' étant une constante, d'après la première partie du théorème, le minimum de $x^2 + y^2$ aura lieu pour $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta}$. Donc dans ce cas la somme $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots\ldots + t^2$ est diminuée.

En prenant ainsi deux à deux les diverses variables, on voit que le minimum de $x^2 + y^2 + \ldots\ldots + t^2$ a lieu pour

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{\beta}{y} = \ldots\ldots = \frac{t}{\tau}.$$

II. — Cela posé abordons le problème. Nous avons à chercher le minimum de

$$M = X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots + X_m^2$$

ou, comme nous supposons

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots + k_1t + l_1 \\ X_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots + k_2t + l_2 \qquad (1) \\ &\vdots \\ X_m &= a_mx + b_my + c_mz + \ldots\ldots + k_mt + l_m \end{aligned}$$

le minimum de

$$\begin{aligned} M = {} & (a_1x + b_1y + \ldots + l_1)^2 + \ldots\ldots \\ & + (a_mx + b_myt \ldots\ldots + l_m)^2 \end{aligned}$$

Or, considérons les équations

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots\ldots + h_1t + l_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + \ldots\ldots + h_2t + l_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_mx + b_my + \ldots\ldots + h_mt + l_m &= 0 \end{aligned}$$

et supposons qu'il y ait un système des $m - 1$ variables $x, y, \ldots\ldots, t$ qui vérifie ces m équations à la fois, c'est-à-dire que le déterminant (*) de ces équations soit nul.

Dans ce cas, la question se termine là, car le minimum de M est alors zéro et a lieu pour les valeurs de $m - 1$ variables qui vérifient à la fois les m équations précédentes.

Mais le plus souvent ces équations n'admettent pas un système de solutions communes, c'est-à-dire que leur déterminant n'est pas nul.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots\ldots & h_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots\ldots & h_2 & l_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & \ldots\ldots & h_m & l_m \end{vmatrix} \gtrless 0$$

(*) Je me crois autorisé, tout en restant dans les limites des Mathématiques élémentaires, à employer la notion de déterminant, la théorie des déterminants ayant été exposée d'une manière élémentaire dans ce journal même par M. Bourget (t. Ier, p. 5 et suiv.).

Nous représenterons ce déterminant par la lettre Δ.

Or, dans le système d'équations (1) quels que soient $x, y, \ldots t$, on a toujours une valeur pour chacune des quantités $X_1, X_2 \ldots X_m$.

Donc les équations.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + \ldots + h_1t + (l_1 - X_1) &= 0, \\ a^2x + b_2y + \ldots + h_2t + (l_2 - X_2) &= 0, \\ &\vdots \\ a_mx + b_my + \ldots + h_mt + (l_m - X_m) &= 0, \end{aligned}$$

doivent toujours être vérifiées à la fois; c'est-à-dire quels que soient $x, y, \ldots t$, on doit toujours avoir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots h_1 & l_1 - X_1 \\ a_2 & b_2 \ldots h_2 & l_2 - X_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_m & b_m \ldots h_m & l_m - X_m \end{vmatrix} = 0,$$

ou, d'après une propriété comme des déterminants (*),

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots l_1 \\ a_2 & b_2 \ldots l_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_m & b_m \ldots l_m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots X_1 \\ a_2 & b_2 \ldots X_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_m & b_m \ldots X_m \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, le premier de ces déterminants n'est autre que le déterminant Δ défini plus haut. Quant au second, développons-le par rapport aux éléments de la dernière colonne, en représentant par $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_m$ les déterminants mineurs correspondant à $X_1, X_2, \ldots X_m$. Nous avons ainsi $X_1\delta_1 - X_2\delta_2 + \ldots \pm X_m\,\delta_m = \Delta$ (2) en prenant pour $X_m\,\delta_m$ le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que m est impair ou pair.

(*) Voir t. I, p. 11, Propriété 5.

Nous voilà donc amenés à chercher le minimum de $M = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_m^2$, sachant que $X_1, X_2, \ldots X_m$ satisfont constamment à la relation (2). Ce minimum aura donc lieu, d'après le lemme précédent établi, pour

$$\frac{X_1}{\delta_1} = \frac{X^2}{-\delta_2} = \ldots = \frac{X_m}{\pm \delta_m}.$$

Si K est la valeur de ces rapports, on voit en multipliant respectivement les deux termes de chacun de ces rapports par $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ et prenant le rapport de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs, que

$$K = \frac{\Delta}{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_m^2} = \frac{\Delta}{\Sigma\delta_i^2}.$$

Il en résulte que

$$X_1 = \frac{\Delta\delta_1}{\Sigma\delta_i^2}, \; X_2 = -\frac{\Delta\delta_2}{\Sigma\delta_i^2}, \ldots X_m \pm = \frac{\Delta\delta_m}{\Sigma\delta_i^2}.$$

On a ainsi m équations entre les $m - 1$ variables x, y, $\ldots$ t. On tire les valeurs de ces variables de $m - 1$ des équations obtenues; comme vérification, ces valeurs doivent satisfaire la m^e équation.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **J. Koenigs**, élève au Lycée Saint-Louis.

Je me propose de démontrer directement et par la synthèse ce théorème dû à M. Faure :

Tout cercle circonscrit à un triangle autopolaire par rapport à une conique est tel que la longueur de la tangente issue du centre de la conique à ce cercle est égale à* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Soit ARS un triangle autopolaire; la polaire RS du point A coupant la conique aux points B et C, les points R et S divisent harmoniquement le segment BC, de sorte qu'en appelant I le milieu de BC, α le second point de rencontre

* L'auteur appelle *triangle autopolaire* ce que l'on appelle souvent *triangle conjugué*, c'est-à-dire un triangle tel que chacun de ses sommets est par rapport à la conique le pôle du côté opposé. (A. M.)

du diamètre IA avec le cercle circonscrit au triangle ARS, on a $$IR.IS = IA.I\alpha = IB^2.$$

Le point α est fixe pour tous les cercles circonscrits à des triangles autopolaires ayant un sommet fixe en A, de sorte que $OA.O\alpha$ mesure le carré de la tangente issue du centre O à tous ces cercles. J'observe en outre que si A et α coïncident, l'angle BAC est droit; car dans ce cas $I\alpha = IA = IB$. Autrement dit, A est alors un point du cercle lieu des angles droits circonscrits; on a $OA = \sqrt{a^2 + b^2}$, et le cercle circonscrit est tangent en A au diamètre OA.

Or, parmi tous les cercles circonscrits à des triangles autopolaires ayant un sommet fixe en A, considérons celui qui est circonscrit à un triangle ayant son sommet R en un point d'intersection de la polaire BC avec le cercle lieu des angles droits circonscrits; d'après la remarque précédente, ce cercle est tangent en R à OB, et par suite

$$OA.O\alpha = OR^2 = a^2 + b^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Le même mode de démonstration s'applique au théorème analogue de l'espace, dû à M. Painvin :

La quantité $a^2 + b^2 + c^2$ *mesure le carré de la tangente issue du centre d'une surface du second ordre à une sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué.*

Si on désigne en effet ARST un tétraèdre conjugué, la puissance du centre I de la section par le plan RST conjugué du point A est égale à la puissance de ce point I par rapport au cercle circonscrit RST conjugué par rapport à cette section; c'est-à-dire que cette puissance est égale à $a'^2 + b'^2$, $2a'$ et $2b'$ étant les axes de la section *(Théorème de Faure)*. On voit donc que la sphère circonscrite coupe le diamètre AI en un point fixe α défini par la relation

$$IA.I\alpha = \alpha' + b'^2$$

pourvu que A soit fixe. En particulier, si $IA = I\alpha = \sqrt{a'^2 + b'^2}$, le point A appartient à la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{a'^2 + b'^2}$, laquelle est le lieu des sommets des cônes passant par la conique et capables d'un angle trièdre trirectangle circonscrit.

Donc si IA = Iα, A est un point de la sphère de Monge, ou le lieu des trièdres trirectangles circonscrits à la surface, et en même temps OA est tangente en A à la sphère ARST. Considérons en particulier la sphère circonscrite à un trétraèdre autopolaire ayant un sommet en A et un autre en R' sur la sphère de Monge. Le point α étant fixe avec A, et OR' étant tangent en R' à la sphère AR'ST, on a

$$OA.O\alpha = OR'^2 - a^2 + b^2 + c^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème de M. Laguerre. — *Soit un point* P *et une conique; on joint* P *aux quatre points* A, B, A', B' *où la polaire de* P *coupe la conique et le cercle lieu des angles droits circonscrits; les angles* APA', BPB' *sont égaux.*

Les bissectrices PR, PS, de l'angle APB forment avec la polaire AB un triangle autopolaire rectangle PRS; le cercle circonscrit à ce triangle est donc orthogonal au centre lieu des angles droits circonscrits *(Th. de Faure)*. J'en conclus que le diamètre RS du premier cercle est divisé harmoniquement en A' et B' par le second. Le faisceau (P, RSA'B') étant harmonique, et les deux rayons PR, PS rectangulaires, PR, déjà bissectrice de l'angle APB, l'est aussi de l'angle A'PB', ce qui démontre le théorème.

CONCOURS ACADÉMIQUE

ACADÉMIE DE DIJON

Concours de 1879.

Dans un triangle quelconque ABC, on désigne par a, b, c les trois côtés, et par I un point qui détermine sur le côté BC deux segments IB, IC, proportionnels aux nombres p et q. Cela étant, on demande de résoudre les quatre questions suivantes :

1° Calculer en fonction de a, b, c, p et q la longueur x de la droite AI;

2° Déduire de la formule obtenue et en fonction de a, b, c, les longueurs α, β, γ des bissectrices intérieures des angles A, B, C et les longueurs α', β', γ' des bissectrices extérieures de ces mêmes angles;

3° Démontrer que si les deux bissectrices intérieures β et γ sont égales, les côtés correspondants b et c sont égaux ;

4° Exprimer en fonction de la surface S du triangle et du rayon R du cercle circonscrit, la quantité Z définie par l'égalité

$$2Z = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha'^2 + \alpha^2} \sin A + \frac{\beta'^2 - \beta^2}{\beta'^2 + \beta^2} \sin B + \frac{\gamma'^2 - \gamma^2}{\gamma'^2 + \gamma^2} \sin C.$$

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

BESANÇON

— Étant données deux circonférences concentriques, de rayons r et r', et un point extérieur A, tel que OA $= d$, mener par ce point une sécante ABC telle que la portion BC, comprise entre les deux circonférences, soit égale à c. On calculera les angles COB et CAO.

DIJON

— Par le point milieu D d'un côté d'un triangle équilatéral, mener une droite telle que ce point D partage intérieurement dans le rapport de 1 à 2 le segment intercepté sur cette droite par les deux autres côtés du triangle, et calculer en fonction du côté a du triangle donné la longueur du même segment.

— On donne deux circonférences tangentes extérieurement. Calculer en fonction de leurs rayons R et R' la perpendiculaire abaissée du milieu de l'une de leurs tangentes communes sur la ligne des centres.

— Un triangle rectangle et son symétrique par rapport à l'hypoténuse forment un quadrilatère BACA' dans lequel on peut inscrire une circonférence ; calculer le rayon R de cette circonférence en fonction des côtés b et c de l'angle droit.

LILLE

— Calculer à 0',1 deux angles dont la somme vaille 60° et dont l'un ait un sinus triple du sinus de l'autre.

— Connaissant tous les éléments d'un triangle, évaluer : 1° les segments déterminés sur chaque côté par le point de contact du cercle inscrit ; 2° les côtés du triangle formé en joignant ces trois points ; 3° la surface du même triangle.

— Quelle valeur faut-il donner à y dans l'équation

$$x^2 - 3xy + y^2 + 2x - 9y + 1 = 0$$

pour que cette équation, résolue par rapport à x, ait ses deux racines égales ? Entre quelles limites doit varier y pour que les valeurs de x soient réelles ?

— On onne dans un trapèze ABCD la grande base b, la petite base b' et la hauteur h. On demande à quelle distance x de la petite base il faut mener une parallèle EF à cette base pour que le trapèze ABEF ait une surface donnée S^2.

— Deux droites OA et OB, d'une même longueur constante a, tournent chacune librement autour de O, qui est fixe; leurs extrémités A et B sont des sommets opposés d'un losange articulé ADBC ayant un côté donné c. On demande : 1° la longueur de la tangente menée du point O au cercle mobile décrit de B comme centre et passant par les sommets voisins C, D du losange; 2° quelle relation existe pour toutes les formes que prend successivement le losange entre les deux distances OC et OD de ces sommets au point fixe.

LYON

— Sur trois axes rectangulaires passant par un point O, on prend des longueurs égales OA, OA', OB, OB', OC, OC'; on joint deux à deux les six points A, A', B, B', C, C'. Démontrer qu'il y a une sphère qui touche les huit faces de l'octaèdre ainsi formé, et calculer le volume de cette sphère en fonction de la longueur OA.

— Les côtés opposés AB, CD de la base d'une pyramide quadrangulaire SABCD se coupent en E, et les deux autres côtés en F, de sorte que les faces ASB, CSD se coupent suivant SE, et les faces ASD, BSC, suivant SF. 1° Démontrer que toute section MNPQ faite dans la pyramide par un plan parallèle à ESF est un parallélogramme; 2° déterminer le point M de SD par exemple pour lequel la section est équivalente à un carré donné K^2.

MONTPELLIER

— Un tronc de cône est circonscrit à une sphère R. Son volume est équivalent à $\frac{4}{3}\pi m R^3$, dans lequel m est donné. Calculer les rayons des cercles de base, et discuter les formules trouvées.

NANCY

— Chercher quelles relations doivent exister entre les coefficients du polynôme $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ pour qu'il soit divisible par $x^2 - a^2$.

POITIERS

— On donne le côté AB $= m$ et l'angle A $= 2\alpha$ d'un losange. On fait tourner ce losange successivement autour : 1° de la diagonale AC; 2° de la diagonale BD; 3° du côté AB. On demande la surface et le volume décrits respectivement par l'aire et le périmètre du losange dans chacun de ces

trois cas; on étudiera la variation de ce volume et de cette surface lorsque m restant constant, α varie de toutes les manières possibles.

— Trouver l'angle, compris entre o et 360° qui satisfait à l'équation

$$\frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{5},$$

— On donne deux cordes $c = 4,19$; $c' = 3,25$ menées d'un même point de la circonférence aux deux extrémités d'un même diamètre; on demande l'aire du cercle.

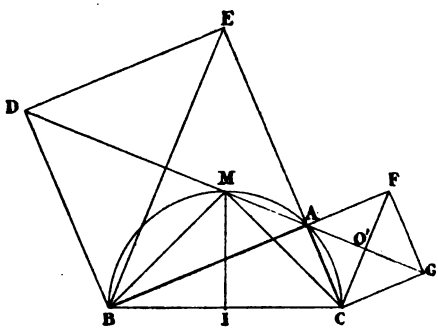
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 139.

Solution par M. Hénon, élève du Lycée de Poitiers.

Du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle on élève une perpendiculaire sur cette hypoténuse. Démontrer que les segments qu'elle détermine sur la droite joignant les centres des carrés construits sur les autres côtés du triangle sont proportionnels aux côtés du triangle.

Soient ABC le triangle et AEDB, ACGF les carrés construits sur AB et AC ayant O et O′ pour centres respectifs. Sur BC décrivons un demi-cercle; il passera en A et coupera OO′ en M. Si on joint M au milieu I de BC, cette droite MI sera perpendiculaire sur BC, car l'angle MAB qui vaut 45° a pour mesure la moitié de l'arc BM, donc cet arc vaut 90° et MI est perpendiculaire sur le milieu de BC. Ceci posé, les deux triangles MOB et MCO′ sont égaux comme ayant MB = MC et OBM = CMO′, ces angles ayant leurs côtés perpendiculaires, de plus ils sont rectangles. Donc OM = O′C,



$MO' = OB$, et comme $\frac{O'C}{OB} = \frac{AC}{AB}$ il en résulte $\frac{OM}{MO'} = \frac{AC}{AB}$.

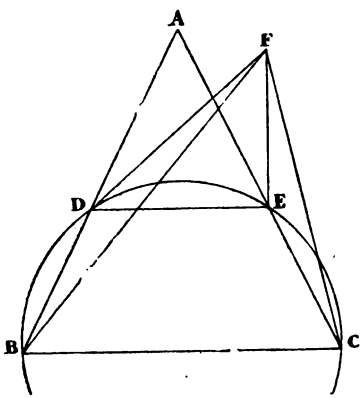
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Gélinet, d'Orléans ; Pasadot, de Poitiers ; Cordeau, École Lavoisier ; Peyrabon, Johannet, à Châteauroux ; Deslais, au Mans ; Hoc, de Longwy ; Schlesser, Vermant, Corbeaux, à Saint-Quentin ; Lery, à Pau ; Martin, à Passy ; Tessier, d'Angoulême ; Ailleret, de Versailles ; Landre, à la Flèche ; Gondy, à Pontarlier ; Dupuy, à Grenoble ; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier.

QUESTION 141.

Solution par M. Lannes, élève du Lycée de Tarbes.

Étant donné un triangle ABC, *inscrit dans un cercle, par les points* B *et* C *on fait passer un cercle qui coupe* AC *en* E *et* AB *en* D ; *puis par les points* D, A, E *on mène un cercle qui coupe en* F *le cercle circonscrit au triangle* ABC. *Démontrez la relation* $\frac{FE + FB}{FC + FD} = \frac{AB}{AC}$.

Les deux triangles DFB, CFE sont semblables comme équiangles, car l'angle DBF est égal à l'angle ECF comme ayant même mesure, l'angle ADF est égal à l'angle AEF pour la même raison et l'angle DFB est égal à l'angle CFE, comme différences d'angles respectivement égaux : on a donc



$$\frac{FB}{FC} = \frac{BD}{EC} = \frac{AB - AD}{AC - AE}$$

d'où l'on tire

(1) $FB \times AC - FB \times AE = FC \times AB - FC \times AD$

Mais à cause de la similitude des triangles DFE, FBC, qui ont un angle égal compris entre côtés homologues proportionnels, on a

$$\frac{FD}{FB} = \frac{FE}{FC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

d'où $$FB \times AE = FD \times AB$$
$$FC \times AD = FE \times AC$$

et, en substituant dans l'égalité (1), elle devient

$$(FB + FE)AC = (FC + FD)AB \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{FE + FB}{FC + FD}$$

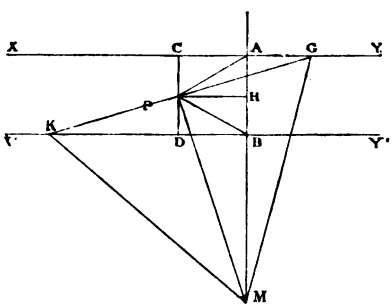
Nota. — Ont résolu la même question: MM. Cordeau, École Lavoisier; Foissey, de Dijon; Cadot, Lycée Saint-Louis.

QUESTIONS 142 et 143.

Solution par M. Marcel Vazou, élève du Collége Rollin.

142. — *Par le sommet* P *d'un triangle équilatéral on mène des droites que l'on termine aux perpendiculaires à la base passant par les extrémités; sur ces droites comme côtés on décrit des triangles équilatéraux. Démontrer que le lieu des troisièmes sommets de ces triangles se trouve sur la base et sur une parallèle à la base.*

Soient le triangle équilatéral PAB, xy, $x'y'$ les perpendiculaires aux extrémités. Le point P se trouve à égale distance de ces deux droites, de sorte que le problème proposé peut être remplacé par le suivant :



On donne deux droites xy, x'y' *et un point* P *à égale distance de ces deux parallèles. Par ce point on fait passer des droites terminées aux deux parallèles sur lesquelles on construit des triangles équilatéraux. Lieu des points* M, *troisièmes sommets de ces triangles.*

Soit GK une position de la droite. Du point M, sommet du triangle équilatéral MGK, abaissons la perpendiculaire MBA

sur les parallèles xy, $x'y'$, puis joignons MP et soit PH perpendiculaire sur MBA. Les triangles semblables MPH, GPC donnent :

$$\frac{PH}{PC} = \frac{PM}{PG},$$

or

$$PM = \frac{GK\sqrt{3}}{2} = PG\sqrt{3},$$

donc

$$\frac{PH}{PC} = \sqrt{3}.$$

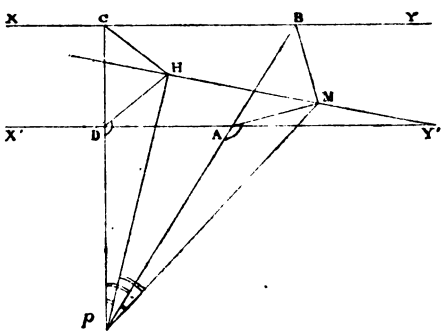
Ce rapport étant constant, et PC étant également constant, PH l'est aussi. Le lieu de M est donc une perpendiculaire aux deux parallèles. En calculant la longueur de la perpendiculaire abaissée du point P sur AB, on trouverait la même valeur que ci-dessus. Par conséquent la perpendiculaire aux deux droites xy, $x'y'$ est la droite AB elle-même.

Il est évident qu'il y a une seconde droite symétrique de AB par rapport à CD qui fait partie du lieu.

Remarque. — Ce problème n'est qu'un cas particulier du suivant :

143. *Par un point* P *pris dans le plan de deux parallèles* xy, x'y', *on mène des droites qui rencontrent ces deux parallèles. Sur les portions de ces droites comprises entre les deux parallèles on construit des triangles semblables à un triangle donné. On demande le lieu des troisièmes sommets de ces triangles.*

Du point P abaissons une perpendiculaire PDC sur les parallèles, et soit le triangle CDH semblable au triangle BAM. Menons HM, PH, PM. A cause des parallèles on a



$$\frac{PD}{PA} = \frac{CD}{AB} = \frac{DH}{AM}.$$

Par suite les triangles PDH et PAM sont semblables comme ayant un angle égal compris entre

côtés proportionnels, d'où il résulte que

$$\frac{PD}{PA} = \frac{PH}{PM}.$$

Les triangles PDA et PHM étant semblables et D étant droit, il s'ensuit que H l'est aussi. Le lieu du point M est donc la droite HM perpendiculaire à PH. Il y a une droite symétrique de la première par rapport à CD qui fait partie du lieu.

Nota. — Ont résolu la question 142 : MM. Tessier, Peyrabon, de Châteauroux; Faivre et Gindre, de Lons-le-Saulnier; Lannes, de Tarbes; Foissey, de Dijon; Jouvencel, de Caen; Cordeau, École Lavoisier, Paris; Dumur, de Chartres. Vermand, de Saint-Quentin; Libman, Collége Stanislas; Zuloaga, de Liége; Manceau; Deslais, au Mans; Jacquier, École normale de Charleville; Cadot, Lycée Saint-Louis à Paris.

Ont résolu la question 143 : MM. Gelinet, à Orléans; Pasquier, à Bruxelles.

QUESTION 144.

Solution par M. Zuloaga, étudiant à l'Université de Liége.

Si l'on divise la base BC *d'un triangle en trois parties égales aux points* Q *et* R, *démontrer les égalités suivantes :*

$$\sin BAR . \sin CAO = 4 \sin BAQ . \sin CAR.$$

$$(\cot g\, BAQ + \cot g\, QAR)(\cot g\, CAR + \cot g\, RAQ) = 4 \operatorname{cosec}^2 QAR.$$

Désignons les angles BAR, QAC, BAQ, RAC respectivement par α, β, α', β'. Il s'agit de démontrer en premier lieu la relation $\sin\alpha \sin\beta = 4 \sin\alpha' \sin\beta'$

soit $BQ = a$. Le triangle BAR donne

$$\frac{2a}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin ARB} \qquad (1)$$

De même le triangle BAQ donne

$$\frac{a}{\sin\alpha'} = \frac{AB}{\sin AQB} \qquad (2)$$

Divisant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{2 \sin\alpha'}{\sin\alpha} = \frac{\sin AQB}{\sin ARB} \qquad (3)$$

De même les triangles QAC et RAC donnent

$$\frac{2a}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin ARC} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sin B'} = \frac{AC}{\sin ARC}$$

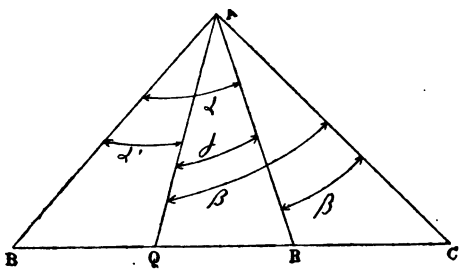
et en divisant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$(4) \qquad \frac{2\sin\beta'}{\sin\beta} = \frac{\sin ARC}{\sin AQC}$$

Multipliant membre à membre les relations (3) et (4) on a

$$\frac{4\sin\alpha'\sin\beta'}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin AQB\ .\ \sin ARC}{\sin ARB\ .\ \sin AQC}$$

Les angles AQB et AQC sont supplémentaires, ils ont donc



même sinus; il en est de même des angles ARC et ARB; donc, le second membre est égal à 1, et l'on a

$$4\sin\alpha'\sin\beta' = \sin\alpha\sin\beta. \qquad (A)$$

2° Posons QAR $= \gamma$. Il s'agit de démontrer que l'on a

$$(\cot g\,\alpha' + \cot g\,\gamma)(\cot g\,\beta' + \cot g\,\gamma) = 4\,\mathrm{cosec}^2\,\gamma.$$

En effet, on a

$$\cot g\,\alpha' + \cot g\,\gamma = \frac{\sin(\gamma + \alpha')}{\sin\alpha'\sin\gamma}.$$

Or $\gamma + \alpha' = \alpha$, donc

$$\cot g\,\alpha' + \cot g\,\gamma = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'\sin\gamma} \qquad (1)$$

De même $\cot g\,\beta' + \cot g\,\gamma = \dfrac{\sin\beta}{\sin\beta'\sin\gamma}$ (2)

en remarquant que $\gamma + \beta' = \beta$.

Si nous multiplions membre à membre les égalités (1) et (2), on a

$$(\cot g\,\alpha' + \cot g\,\gamma)(\cot g\,\beta' + \cot g\,\gamma) = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha'\sin\beta'\sin^2\gamma}$$

ou, à cause de l'égalité (A)

$$(\cot g\,\alpha' + \cot g\,\gamma)(\cot g\,\beta' + \cot g\,\gamma) = \frac{4}{\sin^2\gamma} = \operatorname{cosec}^2\gamma.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Dupuy, de Grenoble; Renaud, de Bordeaux; Foissey, de Dijon; d'Arodes, de Mont-de-Marsan; Crevaux, Longueville, de Charleville; Cadot, élève du Lycée Saint-Louis; Élie, du Collége Stanislas; Landre, au Prytanée de La Flèche; Hugot, de Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

184. — Si, par la projection d'un point de la parabole sur la tangente au sommet, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur issu du sommet, ces perpendiculaires vont concourir en un même point. *(Julliard.)*

185. — On considère l'égalité

$$y^2 = \frac{4a^2x^2 + b^2(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

et on propose d'étudier les variations de y quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. En supposant $a > b$, on propose de démontrer :

1° Que a est le maximum de y;

2° Que b est le minimum de y;

3° Que si l'on donne à y une valeur comprise entre a et b, l'équation bicarrée qui donne x a ses quatre racines réelles, et que si l'on désigne par x_1 l'une des racines, les trois autres sont données par les égalités

$$x_1 + x_2 = 0; \quad x_1x_3 + 1 = 0; \quad x_1x_4 - 1 = 0.$$

(De Longchamps.)

186. — On considère un losange $A_1A_2A_3A_4$. Soit C_4 le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$. On a ainsi quatre points C_1, C_2, C_3, C_4. On prend les milieux des longueurs A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, A_4C_4. Démontrer que la figure formée par ces quatre points est un losange homothétique à celui des points $C_1C_2C_3C_4$. *(De Longchamps.)*

187. — Décrire une circonférence ayant son centre sur une circonférence donnée, et coupant sous des angles donnés deux droites données.

188. — Dans un triangle donné, inscrire un rectangle de diagonale minima, et donner la longueur de la diagonale. *(W.-J.-C. Miller.)*

189. — Montrer que si, par un même point de l'arête d'un dièdre, on mène dans chaque face une droite formant un même angle α avec l'arête, l'angle de ces deux droites ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

190. — Trouver la hauteur d'un segment sphérique à une base qui soit la m^e partie de la sphère.

191. — Partager un tronc de cône par un plan parallèle aux bases de façon que la partie inférieure soit contenue n fois dans le tronc tout entier.

192. — Le triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs du triangle formé en joignant les points de contact du cercle inscrit à un triangle ABC, a pour surface

$$\frac{16T^5}{a^2b^2c^2(a+b+c)^2}$$

T étant la surface du triangle ABC, et a, b, c les longueurs des côtés. *(Corr. Catalan.)*

193. — On joint les sommets A,B,C d'un triangle aux points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2 qui divisent en trois parties égales les côtés opposés. Les droites AA_1, BB_2, CC_1 se coupent en trois points A′, B′, C′; les droites AA_2, BB_2, CC_2 en trois autres points A″, B″, C″. Démontrer que chacun des triangles A′B′C′, A″B″C″ est le septième du triangle ABC. *(Corr. Catalan.)*

Le Rédacteur-Gérant,
J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 18324-9.

THÉORIE DES CENTRES

DES MOYENNES HARMONIQUES

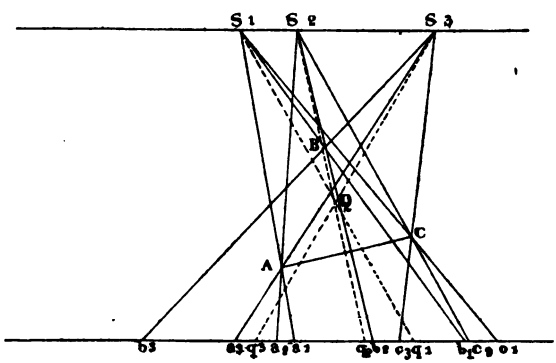
Par M. Kœhler

(*Suite*, voir page 289).

Centres des moyennes harmoniques d'un système de points non en ligne droite.

II. **Théorème.** — *Si l'on donne un nombre quelconque de points dans un plan,* A, B, C . . . *et une droite* SS', *les axes des moyennes harmoniques de* SS' *par rapport au faisceau* SABC. . . *passent constamment par un point fixe, lorsque le sommet* S *se déplace sur la droite donnée; ce point est le* centre des moyennes harmoniques *du système* ABC . . . *par rapport à* SS' (*fig.* 9).

Je considère plusieurs positions S_1, S_2, S_3. . . du sommet,



et je coupe par une parallèle à S_1S_2 tous les faisceaux obtenus; cette parallèle rencontre les axes des moyennes harmoniques relatifs à chacun d'eux aux points q_1, q_2, q_3, . . . qui sont respectivement les centres des moyennes distances de groupes $(a_1\ b_1\ c_1\ .\ .)$, $(a_2\ b_2\ c_2\ .\ .)$, etc. Je rapporte tous les segments à une origine O prise sur la parallèle, et j'aurai

$$Oq_1 = \frac{Oa_1 + Ob_1 + Oc_1 + \ldots}{n}$$

$$Oq_2 = \frac{Oa_2 + Ob_2 + Oc_2 + \ldots}{n} \quad \ldots\ldots$$

et par suite $q_1q_2 = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + \ldots}{n}$

$$q_2q_3 = \frac{a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 + \ldots}{n} \quad \ldots\ldots$$

Mais on a la suite des rapports égaux :

$$\frac{a_1a_2}{s_1s_2} = \frac{a_2a_3}{s_2s_3} = \ldots\ldots = \lambda$$

(λ désignant le rapport des distances du point A aux deux parallèles). $\dfrac{b_1b_2}{s_1s_2} = \dfrac{b_2b_3}{s_2s_3} = \ldots\ldots = \mu$.

De même pour les autres segments.

On conclut de là :

$$q_1q_2 = s_1s_2 . \frac{\lambda + \mu + \nu + \ldots}{n}.$$

$$q_2q_3 = s_2s_3 . \frac{\lambda + \mu + \nu + \ldots}{n}.$$

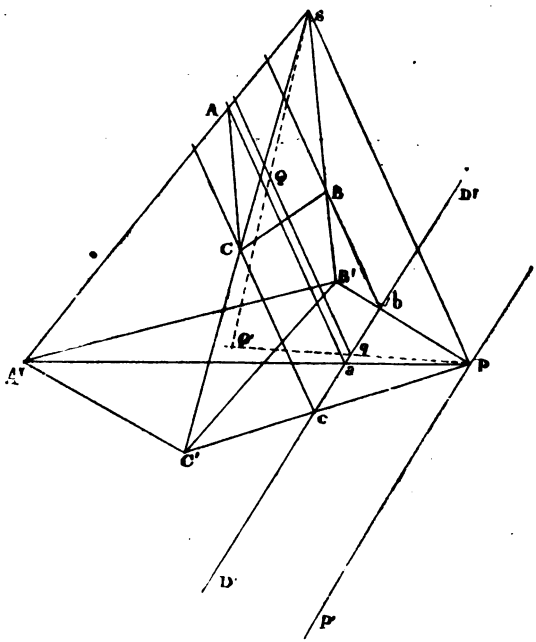
Les deux parallèles étant divisées en parties proportionnelles aux points q_1, q_2, q_3, . . . et s_1, s_2, s_3, . . . on en conclut que les droites s_1q_1, s_2q_2, s_3q_3, . . . se coupent en un même point Q.

12. Poncelet a donné de ce théorème une autre démonstration qui a l'avantage de montrer la connexité entre le centre des moyennes harmoniqus et le centre des moyennes distances du système de points A, B, C . . .

Le centre des moyennes distances de n points A, B, C . . . situés dans un plan, est un point Q tel que, si l'on projette A, B, C, . . . Q sur une droite quelconque du plan par des projetantes parallèles, inclinées sur cette droite ou perpendiculaires, on a toujours la relation $Qq = \dfrac{Aa + Bb + \ldots}{n}$.

On sait que l'on retrouve toujours le même point Q, quelle que soit la droite donnée et quelle que soit la direction des projetantes.

Soit DD′ l'intersection du plan ABC . . . avec un autre plan M arbitraire; je considère un système de projetantes parallèles A*a*, B*b*, . . . Q*q*. Il est évident que le point *q* est le centre des moyennes distances des projections *a*, *b*, *c* . . . Cela posé, je prends un point quelconque S dans l'espace comme centre de projection, et je projette A, B, C, . . . Q sur le plan M en A′, B′, C′, . . . Q′. Je mène SP parallèle à A*a*, B*b*, . . . jusqu'à la rencontre du plan M, puis PP′ pa-



rallèle à DD′. Les droites PA′, PB′, . . . PQ′ seront les perspectives du système de projetantes parallèles tracées dans le plan ABC, et la droite P*q*Q′ sera l'axe des moyennes harmoniques du faisceau PA′B′C′ . . ., relatif à PP′. Si l'on change l'orientation des projetantes, le système de points *a*, *b*, *c*, . . . *q* se déplace sur DD′; le point P se déplace sur PP′; mais la droite mobile P*q* passe toujours par le point fixe Q′, ce qu'il fallait prouver *(fig. 10)*.

Centres harmoniques des divers ordres.

13. Définition. — Si l'on donne sur une droite n points $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ et un pôle p et si l'on cherche un point q tel que la somme des produits r à r des n rapports $\frac{qa_1}{pa_1}, \frac{qa_2, \ldots}{pa_2}$ $\frac{qa_n}{pa_n}$ soit égale à zéro, a sera un *centre harmonique* du r^{me} *ordre* du système de points $a_1, a_2 \ldots a_n$ par rapport au pôle p.

Si l'on rapporte tous les points à l'origine p, on aura, en posant $pq = x$, $pa_1 = a_1$, $pa_2 = a_2$ etc. . . ., une équation du r^e degré en x composée de $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}$ termes de la forme $\left(\frac{a_1 - x}{a_1} \cdot \frac{a_2 - x}{a_2} \ldots \frac{a_r - x}{a_r}\right)$. Cette équation détermine r points. On peut considérer ainsi des centres harmoniques d'ordres $n - 1, n - 2, \ldots 3, 2, 1$. Le nombre des centres de chaque ordre est égal à l'ordre. Il y a un seul centre du premier ordre, c'est précisément le centre des moyennes harmoniques. L'étude des propriétés de ces divers centres est de la plus haute importance dans la théorie des courbes algébriques. Je me bornerai à étudier en détail un système de trois points donnant lieu à deux centres du second ordre et à un centre du premier; et j'indiquerai en passant les généralisations les plus importantes et les plus faciles à saisir.

14. Théorème I. — *Si* q *est un centre harmonique du second ordre du système des trois points* a, b, c, *par rapport au pôle* p, *réciproquement* p *est un centre harmonique du premier ordre du même système, mais par rapport au pôle* q.

On a par définition

$$\frac{qb}{pb} \cdot \frac{qc}{pc} + \frac{qc}{pc} \cdot \frac{qa}{pa} + \frac{qa}{pa} \cdot \frac{qb}{pc} = o \qquad (7)$$

en multipliant chaque terme par $pa.\ pb.\ pc$ et divisant par $qa.\ qb.\ qc$, il vient $\frac{pa}{qa} + \frac{pb}{qb} + \frac{pc}{qc} = o$, et cette équation définit le centre des moyennes harmoniques p des points a, b, c par rapport au pôle q.

Ce théorème a déjà été donné sous une autre forme (7); nous avons vu qu'un point donné p peut être considéré comme centre des moyennes harmoniques relativement à deux points différents donnés par l'équation

$$x^2(a+b+c) - 2x(bc+ca+ab) + 3abc = 0 \quad (8).$$

Ces deux points sont précisément les centres du second ordre, car l'équation (8) n'est autre chose que l'équation (7) développée, en faisant $pq = x$, $pa = a$, etc.

En général si q est un centre d'ordre r d'un système de n points par rapport au pôle p, réciproquement p est un centre d'ordre $(n-r)$ du même système par rapport au pôle q.

Théorème II. — *Si* q_1, q_2 *sont les centres du second ordre du système* a, b, c *par rapport au pôle* p, *le centre du premier ordre du système* q_1, q_2 *par rapport à* p (*c'est-à-dire le conjugué harmonique* Q *de* p) *est en même temps le centre des moyennes harmoniques de* a, b, c *par rapport au même pôle.*

On a $$\frac{2}{pQ} = \frac{1}{pq_1} + \frac{1}{pq_2}.$$

L'équation $$\frac{qb}{pb} \cdot \frac{qc}{pc} + \ldots = 0$$

peut s'écrire

$$\left(\frac{pb-pq}{pb}\right)\left(\frac{pc-pq}{pc}\right) + \ldots = \left(1-\frac{pq}{pb}\right)\left(1-\frac{pq}{pc}\right) + \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{pq} - \frac{1}{pb}\right)\left(\frac{1}{pq} - \frac{1}{pc}\right) + \ldots$$

$$= 3\left(\frac{1}{pq}\right)^2 - \frac{2}{pq}\left(\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc}\right) + \frac{1}{pb \cdot pc} + \frac{1}{pc \cdot pa} + \frac{1}{pa \cdot pb} = 0$$

La somme des racines est

$$\frac{1}{pq_1} + \frac{1}{pq_2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc}\right) = \frac{2}{pQ}$$

Donc on a $\frac{1}{pQ} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc}$, ce qui montre que Q, conjugué harmonique de p par rapport à q_1, q_2 est le centre des moyennes harmoniques de a, b, c par rapport à p.

Théorème III. — *Si* (q_1, q_2,) (q'_1, q'_2), *sont respectivement les centres harmoniques du système* (a, b, c) *pour deux*

pôles différents p, p', *le conjugué harmonique de* p *par rapport à* q'_1, q'_2 *coïncidera avec celui de* p' *par rapport à* q_1, q_2.

Je rapporte les deux pôles p, p', et les points a, b, c à une origine arbitraire O prise sur la droite abc; soient $Op = p$, $Oa = A$, $Ob = B$, etc. Dans l'équation (8), qui a pour racines les distances du pôle p aux deux centres q_1 et q_2, il faudra remplacer x, a, b, c par $X - p$, $A - p$, $B - p$, $C - p$.

Elle deviendra $(X - p)^2(A + B + C - 3p) - 2(X - p)$
$$[(B - p)(C - p) + (C - p)(A - p) + (A - p)(B - p)]$$
$$+ 3(A - p)(B - p)(C - p) = 0,$$
et aura pour racines les distances Oq_1, Oq_2. En effectuant les multiplications et posant pour abréger
$$A + B + C = S_1$$
$$BC + CA + AB = S_2$$
$$ABC = S_3$$
on a : $X^2(S_1 - 3p) - 2X(S_2 - pS_1) + 3S_3 - pS_2 = 0$ (9).

De même les distances Oq'_1, Oq'_2, sont données par l'équation

$X'^2(S_1 - 3p') - 2X'(S_2 - p'S)^1 + 3S_3 - p'S_2 = 0$ (9').

Pour avoir le conjugué harmonique Q de p' par rapport aux points q_1 et q_2, il faut partir de la relation
$$\frac{2}{p'Q} = \frac{1}{p'q_1} + \frac{1}{p'q_2}$$
ou bien $$\frac{2}{OQ - p'} = \frac{1}{X_1 - p'} + \frac{1}{X_2 - p'},$$
X_1 et X_2 désignant les longueurs Oq_1, Oq_2, racines de l'équation (9).

On tire de là $OQ = \dfrac{2X_1X_2 - p'(X_1 + X_2)}{X_1 + X_2 - 2p'}$

et comme
$$X_1 + X_2 = \frac{2(S_2 - pS_1)}{S_1 - 3p}, \quad X_1X_2 = \frac{3S_3 - pS_2}{S_1 - 3p}$$
il vient $$OQ = \frac{6S_3 - 2pS_2 - 2p'(S_2 - S_1p)}{2(S_2 - pS_1) - 2p'(S_1 - 3p)}$$
$$= \frac{6S_3 - 2S_2(p + p') + 2pp'S_1}{2S_2 - 2S_1(p + p') + 6pp'}$$

Pour obtenir le conjugué de p par rapport aux points

q'_1, q'_2, il suffit évidemment de remplacer dans l'expression précédente p par p', et p' par p; comme elle est symétrique par rapport à p et p', elle ne change pas, et le théorème est démontré.

Théorème IV. — *Les centres harmoniques du second ordre de tous les points de la droite* abc *par rapport au système* (a, b, c) *forment une involution quadratique.*

Ce théorème résulte immédiatement de l'équation (9) qui peut s'écrire $S_1X^2 - 2S_2X + 3S_3 - p(3X^2 - 2S_1X + S_2) = 0$; comme elle est de la forme $ax^2 + bx + c + \lambda(a'x^2 + b'x + c') = 0$, les groupes de points qu'elle détermine, quand on fait varier p, sont en involution.

Pour avoir le point central de l'involution, il faut supposer qu'une des valeurs de X devient infinie, ce qui donne $S_1 - 3p = 0$ ou $p = \frac{S_1}{3} = \frac{A + B + C}{3}$. Le point p, par rapport auquel on prend les centres harmoniques, est alors le centre des moyennes distances de a, b, c. Le point central est donné par celle des valeurs de X qui n'est pas infinie, c'est-à-dire

$$X = \frac{3S_3 - pS_2}{2(S_2 - pS_1)} = \frac{3S_3 - \frac{S_1S_2}{3}}{2\left(S_2 - \frac{S_1^2}{3}\right)} = \frac{9S_3 - S_1S_2}{6S_2 - 2S_1^2}.$$

Si l'on fait coïncider le point p avec un des points du système a, b, c, avec a par exemple, il faut faire $p = A$ dans l'équation (9) ou bien $a = 0$ dans l'équation (8), qui est mieux appropriée à ce cas particulier. On obtient alors $x^2(b + c) - 2bcx = 0$, d'où $x' = 0$, $x'' = \frac{2bc}{b + c}$. L'un des centres est le point a lui-même, l'autre est le conjugué harmonique de a par rapport au segment bc.

Soient α, β, γ les conjugués harmoniques de a, b, c par rapport à (b, c), (c, a), (a, b) respectivement. La connaissance des segments $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ qui font partie de l'involution, ou même de deux d'entre eux seulement, permet de construire le point central. Il suffit de décrire deux circonférences sur

$a\alpha$, $b\beta$ comme diamètres ; la corde commune passe au point central. On voit aussi que les points doubles de l'involution sont imaginaires ; car les segments $a\alpha$, $b\beta$ empiètent nécessairement l'un sur l'autre.

Remarque. — On peut ajouter que les pôles p et les points milieux des segments q_1q_2 qui leur correspondent, déterminent sur la droite abc deux divisions homographiques. La distance de l'origine au point milieu z du segment q_1q_2 qui répond au point p est donnée, en effet, d'après l'équation (9) par la formule $z = \frac{S_2 - pS_1}{S_1 - 3p}$; on a donc entre les points variables z et p une relation d'homographie $3pz - S_1(z + p) + S_2 = 0$. Les deux divisions sont même en involution, puisque z et p ont le même coefficient dans la relation précédente.

Théorème V. — *Soit* q *un centre harmonique du second ordre pour un système de trois points* a, b, c *en ligne droite, par rapport à un pôle* p ; *si l'on projette tous ces points sur une transversale quelconque par des rayons issus d'un centre* S, *le point* q', *projection de* q, *sera un centre harmonique du second ordre pour le système des points* a', b', c', *projections de* a, b, c, *et pour le pôle* p', *projection de* p.

La démonstration de ce théorème peut être calquée sur celle que j'ai donnée au n° 6 pour la projectivité du centre des moyennes harmoniques. On a $\frac{qa}{pa} = \lambda \frac{q'a'}{p'a'}$, $\frac{qb}{pb} = \lambda \frac{q'b'}{p'b'}, \ldots$ etc.

La relation $\frac{qb}{pb} \cdot \frac{qc}{pc} + \frac{qc}{pc} \cdot \frac{qa}{pa} + \frac{qa}{pa} \cdot \frac{qb}{pb} = 0$ entraîne donc la suivante $\frac{q'b'}{p'b'} \cdot \frac{q'c'}{p'c'} + \frac{q'c'}{p'c'} \cdot \frac{q'a'}{p'a'} + \frac{q'a'}{p'a'} \cdot \frac{q'b'}{p'b'} +$

D'après cela on peut appliquer à un faisceau de rayons issus d'un même point ce qui a été dit pour un système de points en ligne droite, considérer les *axes harmoniques* du second ordre d'un faisceau de trois rayons par rapport à un autre rayon issu d'un même centre, et appliquer aux axes

harmoniques les théorèmes démontrés pour les centres harmoniques.

La propriété projective s'étend manifestement aux centres et axes harmoniques de tous les ordres. Cela résulte de ce que l'équation de définition est homogène par rapport aux quotients tels que $\frac{qa}{pa}$. *(A suivre.)*

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *A Treatise on some new geometrical methods,*

Par **James Booth,** membre de la Société Royale de Londres.

(*Suite.* Voir page 298.)

---

39. *Le carré de la distance de deux centres des cercles ex-inscrits à un triangle surpasse le carré de la somme de leurs rayons du carré du côté opposé dans le triangle.*

Soient r' et r'' les rayons des cercles opposés aux angles A et C du triangle. On a

$$r' = \frac{pr}{p-a}\,;\ r'' = \frac{pr}{p-c}.$$

Donc $r' + r'' = \dfrac{prb}{(p-a)(p-c)} = \dfrac{p^2r^2b\,(p-b)}{r.p^2r^2}$,

ou $$r' + r'' = \frac{b(p-b)}{r} = b \operatorname{cotg} \frac{B}{2}.$$

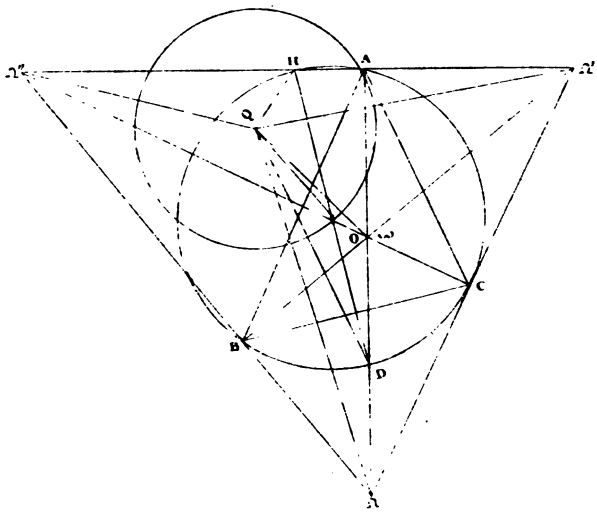
Soit $\Omega\Omega'$ la ligne qui joint les centres Ω et Ω' alors on a (form. 97) : $$\Omega\Omega' = b \operatorname{coséc} \frac{B}{2}.$$

Donc

$$\Omega\Omega'^2 - (r' + r'')^2 = b^2 \left(\operatorname{coséc}^2 \frac{B}{2} - \operatorname{cotg}^2 \frac{B}{2}\right) = b^2. \tag{107}$$

40. *La somme des carrés des tangentes menées des quatre centres des cercles de contact d'un triangle à un cercle quelconque passant par le centre du cercle circonscrit, est égale à trois fois le carré du diamètre du cercle circonscrit.*

Soient ω, Ω' Ω'' les centres des quatre cercles de contact, O le centre du cercle circonscrit par lequel passe le diamètre HD, perpendiculaire à la base BC. Soit Q le centre d'un cercle quelconque passant par le centre du



cercle circonscrit. Joignons le point Q aux points ω, Ω, Ω', Ω'', O, H, D, et joignons le point H au point C ainsi que D au point C. On a

$$Q\Omega^2 + Q\omega^2 = 2QD^2 + 2DC^2, \text{ puisque } DC = D\omega.$$

$$Q\Omega'^2 + Q\Omega''^2 = 2QH^2 + 2HC^2$$

Mais $2QD^2 + 2QH^2 = 4R'^2 + 4R^2$

et $2DC^2 + 2CH^2 = 8R^2$.

Donc

$$(Q\omega^2 - R'^2) + (Q\Omega^2 - R'^2) + (Q\Omega'^2 - R'^2) + (Q\Omega''^2 - R'^2) = 12R^2 \quad (108)$$

Mais, dans le premier membre, chaque expression entre parenthèses représente le carré de la tangente menée de l'un des centres des cercles de contact au cercle Q dont le rayon est R'.

Si $R' = 0$, c'est-à-dire si le cercle arbitraire se réduit à un point, on retrouve un théorème déjà établi (form. 47).

41. *Si les côtés du triangle excentral $\Omega\Omega'\Omega''$ sont prolongés, et que l'on prenne les cercles de contact touchant les côtés de ce triangle, de manière que les centres de ces cercles forment un nouveau triangle excentral, et si l'on continue de même, les triangles successifs ainsi formés tendent vers un triangle équilatéral.*

Soient A, B, C les angles du triangle donné, A′, B′, C′ ceux du premier triangle dérivé, A″, B″, C″ ceux du second, et ainsi de suite. Alors

$$A' = \frac{1}{2}(B + C);\ B' = \frac{1}{2}(C + A);\ C' = \frac{1}{2}(A + B);$$

$$\text{Donc } B' - A' = \frac{1}{2}(A - B);\ C' - B' = \frac{1}{2}(B - C).$$

$$A' - C' = \frac{1}{2}(C - A).$$

Donc les différences entre les angles du premier triangle dérivé sont les moitiés des différences entre les angles du triangle primitif.

On aura de même

$$A'' = \frac{1}{2}(B' + C');\ B'' = \frac{1}{2}(C' + A');\ C'' = \frac{1}{2}(A' + B').$$

et par suite

$$A'' - B'' = \frac{1}{2}(B' - A') = \frac{1}{4}(A - B).$$

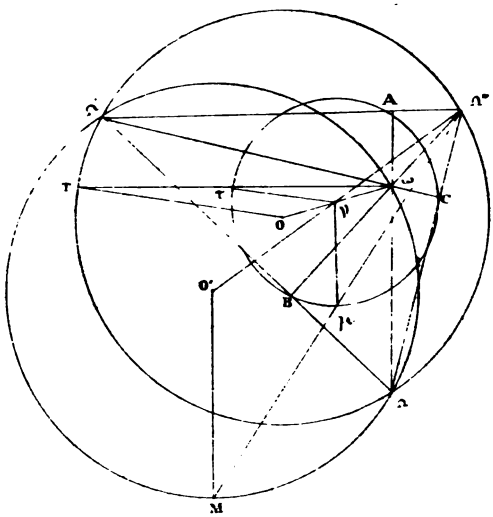
Donc la différence entre les angles A″ et B″ est le quart de la différence entre les angles A et B; on a un résultat analogue pour les autres angles; donc les triangles successifs ont pour limite un triangle équilatéral.

SUR LES TRIANGLES DONT LES SOMMETS SONT TROIS DES QUATRE CENTRES DES CERCLES INSCRITS ET EX-INSCRITS.

42. Dans le triangle donné ABC, considérons le centre ω du cercle inscrit, et les centres Ω, Ω', Ω'' des cercles ex-inscrits. Menons les lignes $B\Omega$, $B\Omega'$ et $B\omega$. On sait que $B\omega$ est la bissectrice de l'angle B, et que $B\Omega$ est la bissectrice de l'angle extérieur; donc $B\omega$ et $B\Omega$ se coupent à angle droit. Il en résulte que $\Omega B\Omega'$ est une ligne droite. En d'autres termes, les lignes qui joignent les centres des cercles ex-inscrits passent par les sommets du triangle ABC.

Le triangle ΩΩ'Ω" peut s'appeler le *triangle excentral principal.*

Nous avons trois autres triangles excentraux en prenant le centre ω avec deux des centres des cercles ex-inscrits.



Les côtés de ces trois triangles passent aussi par les sommets ABC.

Tous les cercles circonscrits à ces quatre triangles sont égaux. En effet, on sait que le diamètre du cercle circonscrit à un triangle est égal à l'un des côtés divisé par le sinus de l'angle opposé. Mais sin ΩΩ'Ω" = sin ΩωΩ", car l'angle AωB est le supplément AΩ'B.

Le triangle ABC est le triangle orthocentrique du triangle excentral ΩΩ'Ω", et ω est l'orthocentre du même triangle excentral. Cela est évident, car AΩ, B"Ω, CΩ' sont les hauteurs du triangle ΩΩ'Ω", et elles passent par ω.

Un quelconque des quatre centres des cercles de contact est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres centres des cercles de contact. Ainsi Ω est l'orthocentre du triangle Ω'ωΩ". Cela est évident à l'inspection de la figure.

43. Puisque les perpendiculaires menées des sommets d'un triangle sur les côtés du triangle orthocentrique se coupent en un point, centre du cercle circonscrit au triangle donné (voir n° 16), il en résulte que :

Si des quatre centres des cercles de contact on abaisse douze perpendiculaires sur les côtés, ces perpendiculaires se rencontrent trois par trois en quatre points, et ces quatre points sont les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles excentraux.

44. Puisque le triangle ABC est le triangle orthocentrique de l'un des triangles excentraux, le rayon du cercle circonscrit à ABC est la moitié du rayon du cercle $\Omega\Omega'\Omega''$ ou de l'un quelconque de ses égaux $\Omega\omega\Omega'$, etc.

45. *Le cercle des neuf points* ABC *bissecte tous les rayons vecteurs menés de l'orthocentre de l'un des triangles excentraux à la circonférence circonscrite au même triangle.*

Soit ω l'orthocentre et ABC le cercle des neuf points du triangle $\Omega\Omega'\Omega''$. Soit ν le centre du cercle des neuf points, on sait que ν est le milieu de $O\omega$, et comme le rayon OT du cercle $\Omega\Omega'\Omega''$ est double de celui du cercle des neuf points ABC, OT est le double de $\nu\tau$. Donc OT est parallèle à $\nu\tau$ et $\omega\nu = \tau T$.

Si l'on prend le triangle $\Omega\omega\Omega'$, dont Ω'' est l'orthocentre, et O' le centre du cercle circonscrit au triangle considéré, alors $O'M$ est double de $\nu\mu$, et $\Omega''O'$ est double de $\Omega''\nu$. Donc $\Omega''\mu = \mu M$. Donc le cercle des neuf points bissecte les rayons menés de l'orthocentre Ω'' à la circonférence du cercle circonscrit au triangle $\Omega\omega\Omega'$.

46. *Les lignes qui joignent l'orthocentre de l'un des triangles excentraux au centre du cercle circonscrit à ce triangle passent par un même point.* — Ce théorème est évident, car toutes ces lignes passent par le centre du cercle des neuf points.

47. *Si par les centres Ω, Ω', Ω'' des cercles de contact, on mène des lignes droites qui passent par les milieux des côtés opposés du triangle, ces lignes prolongées se coupent en un même point.*

Soit I le milieu du côté BC; alors, la surface du triangle BΩI est égale à celle du triangle ΩCI. Mais le double de l'aire du triangle ΩBI est égal à ΩI.ΩB sin BΩI, et le double de l'aire du triangle ΩCI est égal à ΩI.ΩC sin CΩI. Or, en divisant par ΩI, on a

$$\frac{\sin B\Omega I}{\sin C\Omega I} = \frac{\Omega C}{\Omega B} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

En formant des expressions analogues pour les centres Ω′ et Ω″ on trouve

$$\frac{\sin B\Omega I \,.\, \sin C\Omega''I' \,.\, \sin A\Omega'I''}{\sin C\Omega I \,.\, \sin B\Omega'I'' \,.\, \sin A\Omega''I'} = \frac{\cos \beta \cos \gamma \cos \alpha}{\cos \gamma \cos \alpha \cos \beta} = 1.$$

Mais on sait que lorsque trois droites menées par les sommets d'un triangle font avec chaque côté des angles tels que le produit des sinus de trois des angles est égal au produit des sinus des trois autres angles, ces droites passent par un même point.

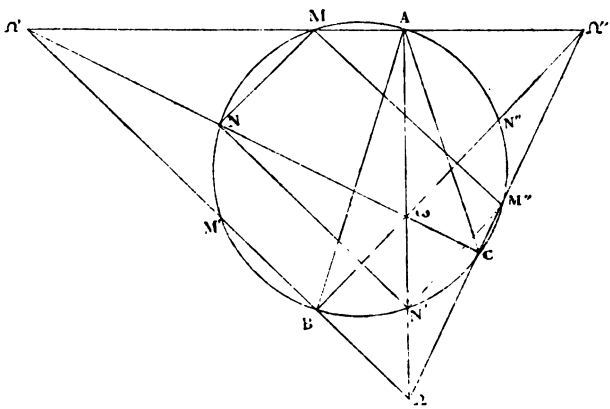
SUR LES CERCLES RADICAUX D'UN TRIANGLE.

48. Si, sur les six lignes qui joignent deux à deux les centres des quatre cercles de contact, comme diamètre, on décrit des circonférences, il est facile de voir (45) que les centres de ces six circonférences sont sur la circonférence du cercle ABC. Nous diviserons ces diamètres en deux séries : ceux qui ont une extrémité en ω, et ceux dont les extrémités sont les centres Ω, Ω′, Ω″ des cercles de contact extérieurs, et nous appellerons les premiers les diamètres *intérieurs*, et les seconds les diamètres *extérieurs*. Les centres des cercles radicaux intérieurs sont aux points milieux N, N′, N″ des arcs AB, BC, CA, tandis que les centres des cercles radicaux extérieurs sont aux points milieux M, M′, M″, des suppléments de ces arcs, de telle sorte que les six centres des cercles radicaux sont sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC et sur trois diamètres respectivement perpendiculaires aux trois côtés.

Les côtés du triangle sont les axes radicaux d'un système formé d'un cercle *intérieur* et d'un cercle *extérieur*, tandis

que les bissectrices sont les axes radicaux d'un système formé de deux cercles de la même espèce.

Puisque ω est l'orthocentre du triangle $\Omega\Omega'\Omega''$, $\omega N = N\Omega'$ et $\omega N' = N'\Omega$. Donc NN' est parallèle à $\Omega\Omega'$ et égal à la moitié de cette ligne. De la même manière, puisque Ω'' est



l'orthocentre du triangle $\Omega\omega\Omega'$, MM'' est égal à la moitié de $\Omega\Omega'$ et lui est parallèle. Donc $MM'' = NN'$; de même $NM = N'M''$ et la figure $NMM''N'$ est un rectangle dont les côtés sont évidemment

$$2R \cos \frac{B}{2} \text{ et } 2R \sin \frac{B}{2}.$$

49. On a vu (98) que l'on a

$$\Omega\Omega'' = 4R \cos \frac{A}{2}, \Omega\Omega' = 4R \cos \frac{B}{2}, \Omega'\Omega'' = 4R \cos \frac{C}{2}$$

et aussi (104)

$$\Omega'\omega = 4R \sin \frac{A}{2}, \Omega''\omega = 4R \cos \frac{A}{2}, \Omega\omega = 4R \sin \frac{C}{2}.$$

En élevant ces expressions au carré, on a, en les ajoutant deux à deux :

$$\left.\begin{array}{c} \Omega\omega^2 + \Omega'\Omega''^2 = 16R^2;\ \Omega'\omega^2 + \Omega''\Omega^2 = 16R^2; \\ \Omega''\omega^2 + \Omega\Omega'^2 = 16R^2. \end{array}\right\} (108)$$

Donc *la somme des carrés d'un côté d'un triangle et de la*

distance de son orthocentre au sommet opposé au côté considéré est égale au carré du diamètre du cercle circonscrit.

On a vu que, si P représente le demi-périmètre du triangle excentral, on a

$$P = 2R\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right).$$

De même, si P′ est la demi-somme des lignes menées du point ω aux sommets du triangle excentral, on a

$$P' = 2R\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right).$$

On a, en reprenant les expressions ci-dessus,

$$\Omega\Omega'^2 + \Omega'\Omega''^2 + \Omega''\Omega^2$$
$$= 16R^2\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right).$$

En réduisant, en remplaçant d'abord les cosinus par leurs valeurs, on trouve, en s'appuyant sur des formules déjà démontrées (12)

$$\Omega\Omega'^2 + \Omega'\Omega''^2 + \Omega''\Omega^2 = 8R(4R + r) \qquad (109)$$

On trouve de la même manière

$$\Omega\omega^2 + \Omega'\omega^2 + \Omega''\omega^2 = 8R(4R - r). \qquad (110)$$

Donc la somme des carrés des côtés du triangle excentral est égale à $8R(4R + r)$, et la somme des carrés des distances des sommets de ce triangle au point ω est égale à $8R(4R - r)$.

50. Les propriétés déjà démontrées nous permettent d'établir que *les six axes radicaux des cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle, pris par groupes de deux, se coupent à angle droit au milieu des côtés d'un triangle et sont parallèles aux côtés et aux hauteurs du triangle excentral principal.*

De même, si ABC est un triangle, ω, Ω, Ω′, Ω″ les quatre centres de contact, *on peut avec ces quatre centres former trois quadrilatères complets. Les douze cercles circonscrits aux triangles qui composent ces quadrilatères passent quatre par quatre aux points* A, B, C, *et leurs centres sont confondus deux par deux en six points sur la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *(A suivre.)*

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE DIJON.

Session de juillet 1879.

Un polygone régulier de douze côtés étant inscrit dans un cercle de rayon r, on demande de calculer en fonction de r : 1° le côté c ; 2° l'apothème a ; 3° la surface S de ce polygone. On aura soin de simplifier le plus possible chacune des expressions obtenues.

— Déterminer les valeurs de x qui rendent maxima ou minima l'expression

$$\cos x + \cos 2x.$$

— On lance un projectile verticalement; exprimer, en fonction de sa vitesse initiale v_0 et de l'intensité g de la pesanteur, le temps qu'il met à parcourir la moitié de la hauteur du point le plus élevé de sa course.

— Calculer le volume engendré par la rotation d'un triangle équilatéral de côté a autour d'un axe situé dans le plan de ce triangle passant par un de ses sommets, et faisant avec le côté opposé un angle de 30°.

— Dans un triangle donné ABC, exprimer la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle A, au moyen des lignes trigonométriques de cet angle, et des longueurs b, c, des côtés qui le comprennent.

— Trouver tous les arcs qui satisfont à l'équation

$$\sin 5x = \sin 7x.$$

FACULTÉ DE PARIS

Session de juillet 1879.

Étant donnée l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

former l'équation du second degré qui admet pour racines les carrés des racines de la précédente.

— D'un point O, on mène à une droite AX une perpendiculaire OA, et trois obliques OB, OC, OD telles que les trois angles AOB, BOC, COD soient égaux; connaissant les longueurs $OA = a$, $AB = b$ calculer AC et AD.

— Soient V, V′, V″, les volumes engendrés par un même triangle rectangle qu'on fait tourner successivement autour de son hypoténuse et autour de chacun de ses côtés de l'angle droit. Prouver que l'on a

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V'^2} + \frac{1}{V''^2}.$$

— Calculer les tangentes des angles d'un triangle sachant que les côtés ont pour valeur 3, 4 et 5.

— Trouver la plus grande et la plus petite valeur de l'expression

$$\frac{x}{x^2 + 1}$$

lorsque la variable x prend toutes les valeurs possibles.

— Calculer le rayon de base et la hauteur d'un cône connaissant son volume $\frac{4}{3}\pi a^3$, et sa surface totale πb^2.

— Les quantités variables x et y étant assujetties à vérifier l'équation,

$$x^2 + y^2 + xy = K^2$$

assigner les valeurs de x et y qui font prendre à l'expression

$$ax + by$$

sa plus grande valeur, et dire quelle est cette valeur maxima.

— Etant donné un tétraèdre ABCD, on demande : 1° de prouver que les milieux des quatre arêtes AC, AD, BC, BD partant des points A et B sont dans un même plan ; 2° de trouver le volume des deux solides dans lesquels le plan qui passe par ces milieux décompose le tétraèdre, connaissant le volume de ce tétraèdre.

— Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d,$$

sachant que $a + b + c + d = 360°$.

— Dans le triangle ABC on donne :

$$A = 60°;\ b = c(2 + \sqrt{3})$$

Calculer la tangente de l'angle $\frac{B - C}{2}$, puis les angles B et C.

— On donne le rayon r du demi-cercle AOB ; calculer le côté CD du trapèze inscrit ABCD, dans lequel la somme des bases est égale à la somme des deux autres côtés.

— Soit AB le diamètre d'un cercle ; on demande quel angle doit faire la corde AC avec ce diamètre, pour que les volumes engendrés par les segments du cercle AMC, BNC tournant autour de AB soient dans le rapport de 9 à 1.

— Le rapport $\frac{b}{c}$ des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à $2 + \sqrt{3}$. Calculer le cosinus de la différence B — C des deux angles aigus.

— On donne les deux bases a et b d'un trapèze, la hauteur h et l'angle V qui font entre eux les prolongements des côtés non parallèles. Calculer les longueurs de ces côtés. On suppose $b > a$. On appliquera les formules trouvées au cas de :

$$a = 2;\ b = 5;\ c = \sqrt{3};\ V = 60°.$$

— A quelles conditions doivent satisfaire les nombres l, m, n, pour que les trois équations

$$x - ly - n = 0,$$
$$y - lx - m = 0,$$
$$nx + my - 1 = 0,$$

puissent être vérifiées par un même système de valeurs de x et y.

— La hauteur d'une pyramide hexagonale régulière est égale au côté de la base ; calculer le cosinus de l'angle des deux faces latérales adjacentes.

— Un levier AB est formé par une barre rectiligne homogène de longueur l, et de poids p. Le point d'appui C divise la barre de façon que AC = 2CB. Quelle est, en tenant compte du poids de la barre, l'équation d'équilibre du levier sollicité à ses extrémités A et B par deux forces F et F' parallèles à la direction de la pesanteur ?

— Connaissant la somme $4a$ des diagonales d'un losange et le rayon r du cercle inscrit, calculer les deux diagonales et la longueur du côté. On appliquera au cas où l'on donne $a = 17{,}5$; $r = 12$.

— Les deux traces d'un plan font avec la ligne de terre un même angle donné α. Calculer la tangente de l'angle de la ligne de terre avec le plan.

— Un corps pesant est placé sur un plan incliné faisant un angle de 45° avec le plan horizontal; P désignant son poids, quelle sera la grandeur de la force qu'il faudra lui appliquer pour le maintenir en repos, cette force étant supposée dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan?

FACULTÉ DE BORDEAUX

Session de juillet 1879.

Étant données les trois arêtes a, b, c d'un parallélépipède rectangle, calculer l'angle des diagonales.

— Résoudre l'équation

$$\operatorname{tg}(x + \alpha) + \operatorname{tg}(x - \alpha) - 2\operatorname{cotg} x = 0.$$

— On propose à une personne d'échanger une rente viagère de 80 francs qu'elle reçoit contre 1000 francs une fois payés; la personne accepte et survit 8 ans à ce marché. Lequel des deux contractants a gagné à cet échange? On supposera le taux d'intérêt à 5 o/o par an.

— On mène à une circonférence de rayon r, quatre tangentes parallèles deux à deux, qui, par leur intersection, forment un parallélogramme. Calculer la surface de ce parallélogramme, connaissant l'angle A de deux tangentes consécutives.

— On donne la hauteur h d'un cône et l'angle α que fait cette hauteur avec l'arête. Calculer le rayon d'un cercle dont l'aire est moyenne proportionnelle entre la surface latérale du cône et celle de son cercle de base. Application $h = 1^m,226$; $\alpha = 29° 42'$.

— Résoudre l'équation

$$\frac{a + x}{b + x} + \frac{b + x}{a + x} = \frac{5}{2}.$$

Vérification.

— Calculer le volume et la surface totale du solide engendré par la révolution du parallélogramme ABCD autour de BA, en admettant

$$AB = 35^m;\ AD = 26^m;\ BAD = 105°.$$

— Deux droites qui font entre elles un angle α inférieur à 90° étant données, on prend $AB = a$; de B, on abaisse une perpendiculaire BD sur AX; du pied D de cette perpendiculaire, on abaisse DE perpendiculaire à AB; puis EF perpendiculaire à AD, etc. Calculer: 1° la somme des 17 premières perpendiculaires; 2° la limite vers laquelle tend la somme d'un nombre infini de ces perpendiculaires.

— Résoudre le système
$$x + y = a^2 + b^2$$
$$4xy = a^4 + a^2b^2 + b^4.$$

Vérifier une des valeurs trouvées.

— La distance des centres de deux cercles est égale à a; l'angle que font leurs tangentes extérieures est égal à 2α; l'angle des tangentes intérieures égal à 2β. Calculer les rayons des cercles. Application :

$$a = 714^m$$
$$2\alpha = 36° 8'$$
$$2\beta = 104° 12'$$

FACULTÉ DE LILLE

Session de juillet 1879.

Enoncé des trois lois de Képler. — Sachant que la durée de la révolution sidérale de la Terre est de 365j,256 et celle de Mars 686j,979; évaluer la distance moyenne de Mars au Soleil, en prenant pour unité la distance moyenne de la Terre au Soleil.

— Étant donnée une ellipse dont on connaît le grand axe et la distance focale, on décrit avec le rayon R une circonférence qui lui soit concentrique. Si M est l'un des points d'intersection des deux courbes, on demande de calculer les rayons vecteurs MF et MF' de ce point. Condition de possibilité déduite des formules.

— Entre quelles limites varie l'expression:

$$\frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2 + 2ax - 1}$$

quand x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a désignant une constante quelconque? Pour quelle valeur extrême de a le maximum et le minimum de l'expression deviennent-ils égaux?

— Étant donné un carré ABCD, trouver sur le côté CD supposé prolongé indéfiniment le point M pour lequel le rapport $\frac{MA}{MB}$ a la plus grande valeur possible.

— Résoudre exactement l'équation:

$$\sin^2(x + 15) - \sin^2(x - 15) = \frac{1}{4}.$$

— Trois forces verticales et de même sens sont appliquées aux trois sommets A, B, C d'un triangle horizontal donné, on donne aussi le point d'application D de leur résultante. Quelle relation obtient-on entre les deux forces appliquées en B et C et les deux triangles ADB, ADC quand on emploie le théorème des moments par rapport à l'axe DA. Trouver le rapport des surfaces des trois triangles ADB, ADC, BDC.

— Par l'extrémité A du diamètre AB d'une demi-circonférence, on mène une corde AC, et par le point C une corde CD parallèle au diamètre. Déterminer, à une seconde près, l'angle BAC de telle manière que la corde AC soit le double de la corde CD.

— Pour établir une communication entre les deux rives d'un torrent, on a le choix de construire soit un pont en bois, qui coûtera seulement 40000 francs, mais qui s'usera vite et qu'on devra reconstruire tous les 30 ans, soit un pont en pierres qui coûtera 120000 francs, mais dont la durée est supposée infinie. On demande quelle est de ces deux constructions la plus économique, en supposant le taux de l'intérêt de 5 0/0, et en admettant que le capital emprunté pour payer chaque construction doive être amorti au moyen d'annuités successives égales, payables à la fin de chaque année, et réparties sur tout le nombre d'années que durera le pont.

— Connaissant dans une ellipse le grand axe $2a$, et la distance focale $2c$, on considère le point M de cette courbe dont le rayon vecteur est $FM = r$; on abaisse de ce point la perpendiculaire MP sur le grand axe. Évaluer 'aire OMP et trouver la valeur de r pour laquelle cette aire est maxima.

— Rendre calculables par logarithmes les expressions

$$\frac{1 + \cos A}{\sin A}; \quad \frac{1 + \sin A}{\cos A}.$$

$$\frac{1 \pm \cos A}{1 \pm \sin A}$$

— Une tour haute de 45 mètres est construite au-dessus d'un sol horizontal. On lance horizontalement du haut de la tour une balle de plomb, et elle va toucher le sol à une distance du pied de la tour égale à 70 mètres. On demande quelle vitesse initiale a été imprimée à la balle.

— Comment faut-il mener la corde CD parallèle au diamètre AB d'une demi-circonférence pour que le périmètre du trapèze ABCD soit maximum? Éviter de prendre pour inconnue la distance de la corde CD au centre.

CONCOURS ACADÉMIQUS

POITIERS 1879

Solution par M. Babu, élève au Lycée de Niort.

(*Copie couronnée.*)

Sur le diamètre AB *d'un cercle on prend* AC = AB, *et on mène en* C *une perpendiculaire à* CAB. *On joint un point quelconque* P *de cette perpendiculaire au point* A; *la droite* PA *rencontre la circonférence en* H. *La droite* BH *rencontre* CP *en* Q. *On mène par* P *une parallèle à* CAB *qui rencontre* QA *en* R *et par le point* Q *une parallèle à* CAB *qui rencontre* PA *en* M. *La figure ainsi formée jouit des propriétés suivantes :* *

1° *Le produit* PC × CQ *est constant.* Les triangles CPA, CQB sont semblables, car les angles CPA, QBC ont leurs côtés perpendiculaires. On peut donc écrire :

$$\frac{PC}{CB} = \frac{CA}{CQ}; \text{ d'où } PC.CQ = CA.CB = K^2.$$

2° *On a* $\frac{PA}{PM} = \frac{HA}{HM}$. Car dans le faisceau de quatre droites QC, QA, QB, QM, l'un des rayons est parallèle à une droite divisée en deux parties égales par les trois autres rayons; ce faisceau est donc harmonique.

3° *Les trois points* P, K, B *sont en ligne droite.* Joignons le

---

* Le lecteur est prié de faire la figure.

point B aux points K et P. Les triangles AKB, PCB, rectangles l'un en A, l'autre en C sont semblables ; en effet la similitude des triangles AKB, ACQ nous donne $\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{CQ}$; les triangles PCA, CBQ donnent aussi $\frac{AC}{CQ} = \frac{PC}{CB}$.

Donc on a $\frac{AK}{KB} = \frac{PC}{CB}$. Par suite les droites BK et BP sont confondues.

4° *Les points* R, B, M *sont en ligne droite.* Je joins le point R aux points B et M, je dis que les deux droites RB et RM sont confondues. En effet, les triangles PAR, MAQ nous donnent

$$\frac{RA}{RQ} = \frac{PA}{PM};$$

d'ailleurs, d'après la construction, $\frac{AB}{QM} = \frac{HA}{HM}$. Mais nous avons vu que $\frac{PA}{PM} = \frac{HA}{HM}$; donc $\frac{RA}{RQ} = \frac{AB}{AM}$, et les deux triangles RAB, RQM sont semblables ; il en résulte que les droites RB et RM sont confondues.

5° *La droite* KM *passe par un point fixe.* Cela résulte de la propriété précédente. En effet, la ligne MO passe par le milieu de PR ; de même la droite KO passe par le milieu de PR. Donc les droites KO, MO qui ont deux points communs se confondent et par suite MK passe par le centre du cercle. De plus MK = MA, car le triangle KMQ est semblable au triangle isocèle AKO.

6° *La droite* HK *passe par un point fixe.* Ce point fixe est le point D où HK rencontre AB. En effet, d'après une propriété connue des polaires dans le cercle, le point D appartient aux polaires des points P et Q, et par conséquent il est le pôle de la droite fixe CP.

7° *Trouver le lieu des points* M *et* R. Le point M, d'après la propriété (5), est également distant de la circonférence OA et de la droite PQ. Par conséquent, si l'on mène une droite parallèle à PQ, du côté du cercle, et distante de PQ d'une longueur égale à OA, le point M sera également distant du point O et de cette parallèle. Il sera donc sur une

parabole ayant O pour foyer, et la droite ainsi construite pour directrice. Le même raisonnement s'applique au point R.

Remarque. Si la droite PQ se rapproche ou s'éloigne du point A, en restant perpendiculaire à BA, de sorte que CA = mBA, m étant différent de 1, le produit CP.CA est encore constant; le rapport $\frac{PA}{PM}$ devient égal à $m\frac{HA}{HM}$; les trois points P, K, B, sont en ligne droite; la droite HK passe toujours par le pôle de la droite PQ; mais les trois points M, B, R ne sont plus en ligne droite.

TOULOUSE 1879

Solution par M. Lannes, élève au Lycée de Tarbes.

(Copie couronnée.)

Trois points OAB *étant situés en ligne droite, on mène par le point* O *une droite variable* OT *et par les deux points* A *et* B *un cercle* ABC *tangent à la droite* OT.

Déterminer la position de la droite OT *de telle manière que le cercle* ABC *ait un rayon donné* R.

On désire obtenir une construction géométrique et aussi une relation algébrique entre les lignes trigonométriques de l'angle O *et les quantités* R, OA, OB.

On déduira de chaque méthode la discussion des résultats.

Solution géométrique. — Du point A comme centre avec la longueur donnée R pour rayon, je décris une circonférence : c'est un premier lieu du centre de la circonférence ABC; par le milieu E de AB j'élève une perpendiculaire sur cette droite. L'intersection de cette perpendiculaire et de la circonférence donnera le centre D de la circonférence ABC.

En menant du point O′ une tangente à la circonférence D, on aura la position de la droite OT.

Comme d'un point extérieur à une circonférence on peut mener deux tangentes à cette circonférence, il y aura deux positions, OC et OC′ de la droite, et, comme il y a deux

circonférences telles que ABC symétriques par rapport à la droite OA, on voit qu'il y aura en général quatre positions de la droite, symétriques deux à deux par rapport à OA.

Discussion. — La seule condition à remplir pour que le problème soit possible, c'est que la perpendiculaire élevée en E sur AB coupe la circonférence A : on doit donc avoir

$$AB < 2R$$

ou en désignant OA par a, OB par b

$$b - a \leq 2R.$$

Pour $b - a = 0$, il y a trois positions de la droite, l'une suivant OA et les deux autres symétriques par rapport à OA.

Pour $b - a < 2R$, il y a quatre solutions.

Pour $b - a = 2R$, les quatre positions se réduisent à deux symétriques par rapport à OA.

Solution analytique. — Désignons l'angle COD par α et l'angle AOD par β : désignons aussi l'angle O par x.

Le triangle rectangle COD donne

$$\cos\alpha = \frac{OC}{OD},$$

ou, en remplaçant OC et OD par leurs valeurs $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{R^2 + ab}$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{ab}{R^2 + ab}};$$

de même le triangle DOE donne

$$\cos\beta = \frac{a + b}{2\sqrt{R^2 + ab}}.$$

Or, on a l'égalité $\alpha + \beta = x$

qui devient successivement

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos x$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \cos x = \sin\alpha\sin\beta,$$

et, en élevant au carré et exprimant tous les arcs par leurs cosinus,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2 x - 2\cos\alpha\cos\beta\cos x = 1. \quad (1)$$

Remplaçons dans cette égalité $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ par leurs valeurs, il vient $\dfrac{ab}{R^2 + ab} + \dfrac{(a + b)^2}{4(R^2 + ab)}$

$$+ \cos^2 x - \cos x \cdot \frac{a + b}{\sqrt{R^2 + ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{R^2 + ab}} = 1;$$

ou, en faisant tout passer au premier membre, simplifiant et ordonnant par rapport à cos x

$$4(R^2 + ab)\cos^2 x - 4(a + b)\sqrt{ab}\,.\cos x + (a + b)^2 - 4R^2 = 0. \qquad (2)$$

La relation (1) étant encore vraie quand on a

$$\alpha - \beta = 0,$$

on voit que les deux valeurs du cosinus données par l'équation (2) s'appliqueront, l'une à l'angle COD, l'autre à l'angle COD'.

Résolvant, il vient, toutes réductions faites,

$$\cos x = \frac{1}{2(R^2 + ab)}\left(\sqrt{ab}\,(a + b) \pm R\sqrt{4R^2 - (a - b)^2}\right)$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que la quantité sous le radical soit positive, c'est-à-dire que l'on ait $b - a \leq 2R$.

Il faut ensuite que la valeur du cosinus soit inférieure à 1 et supérieure à — 1, c'est-à-dire que l'on ait

$$(a + b)\,.\sqrt{ab} + R\sqrt{4R^2 - (a - b)^2} \leq 2(R^2 + ab)$$

et $(a + b)\,.\sqrt{ab} - R\sqrt{4R^2 - (a - b)^2} \geq -2(R^2 + ab)$

ou, en isolant le radical et élevant au carré,

$$4R^4 - R^2(a - b)^2 \leq [2(R^2 + ab) - (a + b)\sqrt{ab}]^2$$

et $4R^4 - R^2(a - b)^2 \leq [2(R^2 + ab) + (a + b)\sqrt{ab}]^2$.

La première inégalité entraînant la seconde, c'est la seule qui doive être satisfaite ; en effectuant, on trouve toutes réductions faites : $-R^2 < ab$

inégalité qui est toujours vérifiée.

La seule condition est donc $b - a \leq 2R$.

Lorsque $b - a = 0$, les deux valeurs de cos x sont

$$\cos' x = 1 \qquad \cos'' x = \frac{ab - R^2}{ab + R^2};$$

l'un des angles devient nul, et il n'y a que trois positions de la droite OT : c'est ce qu'on avait trouvé par une autre méthode.

Pour $b - a < 2R$, l'équation a deux racines admissibles ; il y a donc quatre positions de la droite, symétriques deux à deux par rapport à OA.

Si $b - a = 2R$, il y a une racine double : il n'y a que deux positions de la droite.

Remarque I. — On serait arrivé aux mêmes résultats en s'appuyant sur les propriétés du quadrilatère inscriptible pour calculer l'angle O.

Remarque II. — Si par A et B on menait d'autres circonférences coupant la droite OC, les points d'intersection de ces circonférences avec la droite formeraient une involution dont le point O serait l'origine et C un point double.

Le lieu de ce point double, quand la droite OT tourne autour du point O, est une circonférence décrite de O comme centre avec $\sqrt{ab}$ pour rayon : cette circonférence coupe orthogonalement toutes les circonférences passant par A et B.

QUESTIONS PROPOSÉES A DES EXAMENS DE L'ÉTRANGER

BELGIQUE

Trouver un nombre x tel que si on le retranche des nombres donnés a et b, et qu'on divise les restes obtenus respectivement par b et par a, la somme des quotients soit 1. Démontrer que la valeur de l'inconnue est positive quels que soient a et b.

— Trouver trois nombres x, y, z en supposant : 1° que les deux derniers soient entre eux dans un rapport donné $\frac{m}{n}$; 2° que si au premier on ajoute chacun des deux autres, les deux sommes soient respectivement a et b. Trouver les conditions pour que les inconnues soient positives.

— Construire un triangle semblable à un triangle donné et équivalent à un trapèze donné.

— Déterminer sur une droite donnée un point tel que les deux tangentes menées de ce point à un cercle donné fassent entre elles un angle donné.

— Trouver entre quelles limites peut varier K dans l'équation

$$y^2 - 2axy + b^2x^2 - a^2y + abx - K = 0$$

lorsque x et y prennent toutes les valeurs réelles possibles. Discuter en supposant que a soit inférieur, supérieur, ou égal à b.

— Étant donnés un cercle et deux points A et B dans le plan de ce cercle, trouver sur la circonférence un point K tel que, en menant les sécantes AKL, BKM, la corde LM soit parallèle à AB. On supposera : 1° les deux points hors du cercle; 2° les deux points dans le cercle; 3° un point en dehors, l'autre en dedans.

— Deux ouvriers A et B ont reçu pour de l'ouvrage fait, le premier 30 francs et le second 14 francs, ce dernier ayant travaillé trois jours de moins

que le premier. Si A avait travaillé deux jours de moins, et B, cinq jours de plus, ils auraient reçu autant l'un que l'autre; on demande le nombre de jours de travail, et le prix de la journée de chacun.

— Construire un triangle connaissant deux angles et le rayon du cercle inscrit.

— Une personne qui possède 80000 francs emploie une partie de cette somme à faire l'acquisition d'une maison. Elle place ensuite les trois quarts de ce qui lui reste à 5 o/o et le dernier quart à 4 1/2 o/o; elle se forme avec ce placement un revenu de 2925 francs. On demande le prix de la maison et le montant des sommes placées à 5 et à 4 1/2 pour cent.

ITALIE

Questions proposées aux examens pour la Licence des Lycées et Instituts techniques en 1879, session d'été.

I

1. Trouver une proportion par quotient connaissant la somme de ses termes, la somme de leurs carrés et la somme de leurs cubes.

2. Trouver la valeur des rayons des quatre cercles tangents aux trois côtés a, b, c, d'un triangle; en calculer la valeur dans le cas d'un triangle dont les côtés sont:

$$a = 3426^m,927$$
$$b = 2854^m,031$$
$$c = 2543^m,246$$

II

1. Trouver deux nombres connaissant leur somme $2s$, et la somme de leurs quatrièmes puissances $2q$.

2. Calculer en général le volume d'un segment sphérique à une base, connaissant le rayon R de la sphère, et la flèche h du segment. Appliquer le cas où l'on a

$$R = 7^m,3;$$
$$h = 3^m,57.$$

Nota. — Pour traiter chacun des deux sujets précédents les candidats ont sept heures.

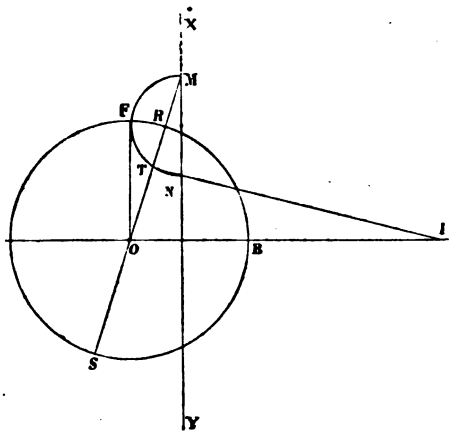
SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 146.

Solution par M. Aillerret, élève du Lycée de Versailles.

On donne un cercle, un diamètre AB *et une droite* XY *perpendiculaire à* AB. *La polaire d'un point* M *de* XY *coupe cette droite en* N *et sur* MN *comme diamètre on décrit un cercle. Démontrer que, si l'on fait varier le point* M *sur* XY, *tous les cercles tels que* MN *ont pour axe radical le diamètre* AB.

Rappelons le principe suivant : *Lorsqu'une droite est divisée harmoniquement par deux points, la moitié de cette droite est moyenne proportionnelle entre les distances du milieu de la droite aux deux points*



Soit IT la polaire du point M; cette polaire coupe XY en N. Comme elle est perpendiculaire sur le diamètre passant par le point M, le point T appartient à la circonférence décrite sur MN comme diamètre. La droite RS est divisée harmoniquement par le point M et le pied T de sa polaire. On a donc d'après le principe énoncé

$$\overline{OR}^2 = OT \,.\, OM = r^2 = \overline{OF}^2$$

r étant le rayon de la circonférence. Donc OF est la tangente à la circonférence MN, au point F. Pour un autre point M′ on aurait de même

$$\overline{OR}^2 = OT' \,.\, OM' = r^2 = \overline{OF'}^2$$

OF′ sera la tangente et sera égale à OF.

Donc toutes les tangentes menées de O à tous les cercles tels que MN sont égales. Le point O appartient donc à l'axe radical de ces cercles, lequel axe radical se confond avec la perpendiculaire abaissée du point O sur xy, c'est-à-dire est le diamètre AB lui-même.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vazou, au Collége Rollin; Combebiac, à Montauban; Elie, Collége Stanislas.

QUESTION 148.

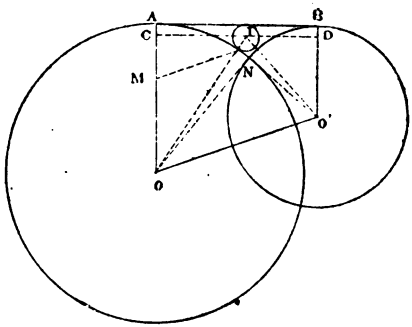
Solution par M. Blessel, piqueur des Ponts et Chaussées.

Deux cercles se coupent sous un angle de 120°. *On mène un cercle tangent à la fois à la tangente commune et aux deux*

cercles donnés. On a, entre les rayons r *et* r' *des cercles donnés et le rayon* x *du cercle tangent la relation*

$$\frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{3r}} + \frac{1}{\sqrt{3r'}}. \qquad \text{(Perrin.)}$$

Soient les deux cercles O et O' qui se coupent sous un angle ONO' $= \alpha$, et I le petit cercle de rayon x. Par les points I et B menons les droites CD et MB parallèles, la première à AB, et la seconde à OO; désignons en outre par r et r' les rayons des cercles O et O'.



Le triangle O'ID donne successivement

$$\overline{ID}^2 = \overline{IO'}^2 - \overline{O'D}^2 = (r + x)^2 - (r - x)^2;$$

$$ID = \sqrt{4r'x}.$$

Le triangle OIC donne de même

$$IC = \sqrt{4rx}.$$

En ajoutant ces deux égalités il vient

$$ID + IC = AB = \sqrt{4r'x} + \sqrt{4rx}. \qquad (1)$$

Dans le triangle ABM nous avons

$$\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{MA}^2 = \overline{OO'}^2 - (r - r')^2;$$

mais dans le triangle ONO' le côté $\overline{OO'}^2$ est égal à

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha;$$

portant cette valeur dans l'égalité précédente on trouve

$$AB = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha - (r - r^2)'}, \qquad (2)$$

et de (1) et (2) on tire

$$\sqrt{2rr'(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{4r'x} + \sqrt{4rx}. \qquad (3)$$

Dans le cas qui nous occupe, l'angle $\alpha = 120°$; nous avons donc, en remplaçant dans (3) $\cos \alpha$ par $-\frac{1}{2}$ et après simplifications,

$$\sqrt{3rr'} = \sqrt{4r'x} + \sqrt{4rx},$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{3r}} + \frac{1}{\sqrt{3r'}}.$$

Remarques. 1° Si les deux cercles se coupent sous un angle de 90°, $\cos\alpha = 0$; et en introduisant cette condition dans (3) on a

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}} \qquad (4)$$

qui n'est autre chose que l'équation de la question 88 (t. II, p. 152) et dans laquelle x représente, non le rayon, comme dans (4), mais le diamètre.

2° Si les deux cercles étaient tangents, c'est-à-dire si l'angle α était égal à 180°, $\cos\alpha$ serait égal à -1, et l'on aurait (voir question 9, t. Ier, p. 60)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}.$$

3° Pour les cas où $\alpha = 60°$, il vient, à cause de $\cos 60 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{4x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r'}}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Tessier, d'Angers; Vermand, à Saint-Quentin; Dupuy, à Grenoble; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier; Baudot, à Dijon; d'Arodes, à Mont-de-Marsan; Lannes, à Tarbes; Manceau, à Orléans; Dumur, à Chartres; Vazou, Collége Rollin; Longueville, à Charleville; Bucheron, à Moulins; Hugot, à Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

194. — On donne une circonférence de centre O, et un diamètre AB. Trouver le lieu des points M tels que le carré construit sur la tangente MT soit équivalent à quatre fois le triangle MOP, P étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur AB. *(Lucien Lévy.)*

195. — Sur un quadrant AB, de centre O, on prend un point C; déterminer sur la tangente en A un point D tel que les surfaces des triangles ACD, OCD soient entre elles dans un rapport donné K. Discuter. *(Lucien Lévy.)*

196. — Sur les trois côtés d'un triangle quelconque comme diamètres, on décrit des circonférences, et on mène les tangentes communes à ces circonférences considérées

deux à deux. Démontrer que le produit des trois tangentes communes est égal à la surface du triangle multipliée par le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.

(Léon Arnoye.)

197. — Si par un point quelconque pris dans l'intérieur d'un triangle on mène des parallèles aux trois côtés, on détermine sur chaque côté trois segments; le carré du produit des trois segments intermédiaires est égal au produit des six autres. *(Léon Arnoye.)*

198. — Par quel nombre faut-il multiplier un nombre donné pour que la somme des valeurs absolues de ses chiffres significatifs reste la même? *(Léon Arnoye.)*

199. — Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

200. — On donne une circonférence, un diamètre AB et les tangentes aux extrémité de ce diamètre ; un angle droit dont le sommet est en A, coupe la tangente en B aux deux points C et D. On mène par les points C et D les tangentes à la circonférence ; ces tangentes rencontrent en F et H la tangente en A, et se coupent elles-mêmes au point P.

1° Démontrer que les diagonales du trapèze CDHF se coupent sur le diamètre AB en un point M tel que $AM = \frac{AB}{5}$;

2° Trouver le lieu du point P lorsque l'angle droit tourne autour du point A. *(J. Nomy.)*

201. — Soit O le centre d'un cercle, ABC un triangle circonscrit à ce cercle, A', B', C' les points de contact des côtés BC, CA, AB. Désignons par R le rayon du cercle, par S et S' les aires des triangles ABC, A'B'C'. Démontrer les relations suivantes :

$$S^2 = R^4 \frac{CA'B' \times BA'C' \times AB'C'}{OA'B' \times OB'C' \times OC'A'}$$

$$S = \frac{R \cdot CA'B' \times BA'C' \times AB'C'}{S'^2}.$$

(Combier.)

202. — Résoudre le système

$$x + y + z = (a + b + c)(a + b - c)$$
$$xy + xz - yz = b\,[(a + c)(a - c)(2a - b) + 2ab^2]$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + 2\,b^2\,(a^2 + c^2)$$

(Combier.)

CORRESPONDANCE

Nous recevons de M. d'Ocagne une lettre dont nous extrayons le passage suivant :

Au moment où paraît dans le journal ma note sur le minimum d'une expression algébrique à plusieurs variables, je trouve dans mes cahiers une démonstration très simple du lemme sur lequel repose cette note, démonstration que j'avais complétement oubliée. Elle repose sur l'identité facile à vérifier.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) = (b_1a_1 + a_2b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2$$

D'après cela, pour trouver le minimum de $x^2 + y^2 + \ldots + t^2$, sachant que l'on a

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots + \delta t = A,$$

A étant une constante, formons le produit

$$(\alpha^2 + \beta + \gamma^2 + \ldots + \delta^2)(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + t^2)$$

au minimum duquel correspond celui de l'expression considérée.

Or, d'après le lemme précédent, ce produit est égal à

$$(\alpha x + \beta + \gamma z + \ldots + \delta t)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + \ldots + (\alpha t - \delta s)^2$$

Cette expression est une somme de carré; le premier terme est constant; le minimum de la somme des autres termes aura lieu quand ils seront tous nuls, c'est-à-dire lorsque l'on aura

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \ldots \frac{t}{\gamma}.$$

La valeur de ce minimum est

$$\frac{A}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots + \delta^2}$$

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 19562-9.

AVIS

A la demande d'un grand nombre de nos abonnés, nous nous décidons à introduire, à partir du 1er janvier 1880, une modification importante dans la rédaction du *Journal de Mathématiques élémentaires*.

Chaque livraison contiendra un certain nombre d'articles de mathématiques spéciales; ainsi modifié, le journal s'adressera *sans distinction* à tous les candidats aux écoles du gouvernement. Ceux de nos abonnés qui se préparent à l'École polytechnique ou à l'École normale y trouveront des questions se rapportant plus directement à leurs études journalières.

Le journal prend le titre de *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*.

Nous recevrons donc avec reconnaissance les communications qu'on voudra bien nous adresser, soit sur l'algèbre supérieure, soit sur la géométrie analytique, en nous imposant toutefois la condition de publier exclusivement des articles qui soient à la portée des élèves.

Comme par le passé, nous publierons des questions résolues par des élèves; toutes les solutions exactes seront mentionnées, et même dans certains cas nous ferons paraître plusieurs solutions d'une même question, lorsque les méthodes suivies par leurs auteurs seront différentes.

M. Boquel a bien voulu nous promettre sa collaboration; il se chargera du classement et de la publication des articles de mathématiques spéciales. L'étendue de ses connaissances, sa grande expérience de l'enseignement, nous seront d'un précieux secours.

THÉORIE DES CENTRES

DES MOYENNES HARMONIQUES

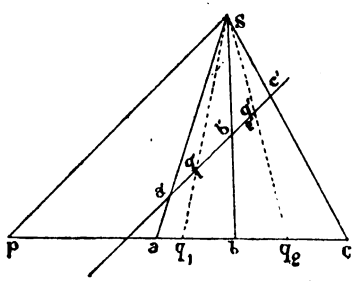
Par M. **Kœhler.**

(*Suite*, voir page 321.)

15. — *Construction des centres harmoniques du second ordre d'un système de trois points.*

Je considère d'abord le cas où le pôle p est à l'infini ; l'équation (9) donne alors $3X^2 - 2S_1X + S2 = 0$, et en prenant pour origine le point a, $3X^2 - 2(b + c)X + bc = 0$. Cette équation donne $X = \frac{b+c}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2 - bc}$; il suffit donc de chercher le centre des moyennes distances des trois points, et de porter à droite et à gauche de ce centre une longueur $\frac{1}{3}\sqrt{b^2 + c^2 - bc}$; dans cette expression, très-facile à construire, b et c représentent les distances des points b et c au point a, distances qu'on peut toujours regarder comme de même signe, en prenant pour le point a un des points extérieurs du groupe.

Soit maintenant *(fig. 11)* p un pôle quelconque; je forme un faisceau $Spabc$ et je le coupe par une parallèle $a'b'c'$ à Sp ; je détermine les centres du second ordre q'_1, q'_2 pour les trois points a', b', c' et le point à l'infini, d'après la construction précédente. Les rayons Sq'_1, Sq'_2 détermineront en vertu du théorème V, les points cherchés q_1, q_2.



J'ai donné deux solutions moins élémentaires du même problème dans un mémoire sur les courbes du troisième

ordre (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier, février et mars 1872).

Cas particulier où deux des points a, b, c *coïncident.* — Si l'on fait $b = a$ dans l'équation (8) qui suppose l'origine au pôle p, elle devient $x^2(2a + c) - 2x(a^2 + 2ac) + 3a^2c = 0$. Les solutions de cette équation sont $x' = a$, $x'' = \frac{3ac}{2a + c}$. Un des centres est le point *double* a lui-même; le second est le centre des moyennes harmoniques de p par rapport aux points A et C, le second C étant considéré comme double; en effet on peut écrire $\frac{3}{x''} = \frac{2a + c}{ac} = \frac{2}{c} + \frac{1}{a}$.

Étude des polaires rectiligne et conique d'un point par rapport à un triangle.

16. **Théorème VI.** — *Si par un point* p *on mène des transversales rencontrant les trois côtés du triangle, le lieu des centres harmoniques du second ordre des trois points situés sur chaque transversale, par rapport au pôle* p, *est une conique passant par les trois sommets du triangle* (polaire conique du point p).

Ce théorème est évident d'après le principe de géométrie analytique rappelé au n° 10 de ce mémoire; il y a deux centres du second ordre sur chaque transversale, le lieu est donc une courbe du second degré. Si la transversale passe par un des sommets, deux des trois points se confondent avec ce sommet, qui par suite appartient au lieu, d'après la remarque du numéro précédent.

Théorème VII. — *La polaire rectiligne d'un point par rapport à un triangle est en même temps la polaire de ce point par rapport à sa polaire conique.*

Cela résulte de ce que, sur chaque transversale telle que $pabc$, le centre des moyennes harmoniques de p est le conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux centres q_1 et q_2 (théorème II).

Remarque. — La polaire rectiligne de p ne rencontre pas la polaire conique; en effet, si elle la rencontrait, un des points d'intersection serait le point de contact d'une trans-

versale avec la conique ; or un pareil point ne saurait exister, car les deux points q_1, q_2 ne peuvent jamais se confondre, l'involution définie ci-dessus (théorème IV), ayant ses points doubles imaginaires.

Théorème VIII. — *Si* q *est un point de la polaire conique de* p, *réciproquement* p *est un point de la polaire rectiligne de* q, *ou encore : le lieu des points dont les polaires rectilignes passent en* p *est la polaire conique de* p, *et le lieu des points dont les polaires coniques passent en* q *est la polaire rectiligne de* q.

Cet énoncé est une conséquence immédiate du théorème I.

Théorème IX. — *Les polaires coniques de tous les points d'une droite passent par un même point, dont cette droite est la polaire rectiligne.*

En effet, si l'on prend deux points p, p' sur la droite, les deux polaires coniques se couperont en quatre points, savoir les trois sommets du triangle et un quatrième point Q. La polaire rectiligne de Q doit passer par p et p' ; nous savons d'ailleurs que pp' considérée comme polaire rectiligne n'a qu'un seul pôle (indépendamment des trois sommets qui peuvent être regardés chacun comme le pôle d'une droite quelconque du plan).

Théorème X. — *Toutes les droites qui passent par un point ont leurs pôles sur la polaire conique du point.*

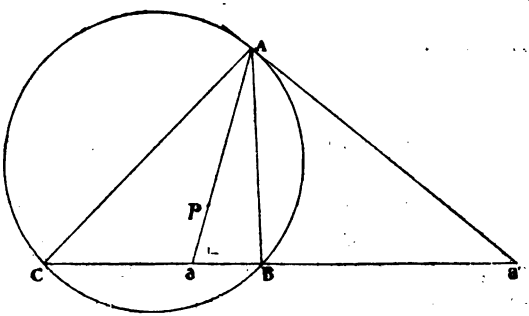
(Conséquence du théorème I).

Remarque. — Les théorèmes précédents s'appliquent à une courbe quelconque du troisième ordre ; seulement les polaires coniques de tous les points du plan n'ont pas trois points communs ; elles passent toutes par le point double, quand il existe.

Théorème XI. — *La tangente à la polaire conique d'un point* p *menée au sommet* A *du triangle est le rayon conjugué harmonique de* Ap *par rapport aux côtés* AB, AC.

Je considère la droite Ap et je vais chercher le point (autre qu'un des sommets) où se coupent les polaires coniques de

tous les points de cette droite, c'est-à-dire le pôle de Ap considérée comme une polaire rectiligne. En appliquant la construction indiquée au n° 9, je prends le conjugué harmonique a' par rapport à B, C du point a où Ap rencontre BC, et je joins Aa', le pôle cherché est sur cette droite. Mais c'est le point A lui-même, car il faudrait ensuite prendre le conjugué par rapport à A, C de l'intersection de Ap avec AC et joindre B à ce conjugué, qui n'est autre que le sommet A. On conclut de là que le rayon Aa', conjugué harmonique de Ap par rapport aux côtés AB, AC *(fig. 12)*, rencontre la



conique en deux points qui se confondent en A ; c'est donc la tangente.

On peut ajouter que les polaires coniques de tous les points de Ap sont tangentes à la même droite Aa'.

Théorème XII. — *La polaire conique d'un point pris sur un des côtés d'un triangle se compose de deux droites.*

En vertu de la remarque du théorème IV, si par un point a du côté BC on mène une transversale quelconque abc, les deux centres harmoniques des points a, b, c par rapport à l'un d'eux a, sont le point a lui-même et son conjugué harmonique par rapport à b et c ; donc la polaire du point a par rapport aux deux côtés AB, AC fait partie de la polaire conique.

Le côté BC lui-même fait également partie de cette polaire, car si la transversale se confond avec le côté, un des trois points où elle coupe les côtés du triangle devient

indéterminé, il en est de même par conséquent des deux centres harmoniques.

Théorème XIII. — *La polaire conique du centre de gravité est une ellipse dont les tangentes aux trois sommets du triangle sont parallèles aux côtés opposés, et qui a pour centre le centre de gravité.*

On voit en effet que les tangentes aux sommets étant les rayons conjugués harmoniques des médianes par rapport aux côtés qui les comprennent, sont parallèles aux côtés opposés. Les médianes sont d'ailleurs les diamètres conjugués des cordes parallèles aux côtés correspondants ; elles passent donc au centre. On voit aussi que la polaire rectiligne du centre de gravité est à l'infini, ce qui prouve d'une autre manière que ce point est le centre de l'ellipse.

Théorème XIV. — *Le pôle du cercle circonscrit s'obtient en partageant chaque côté proportionnnellement aux carrés des deux autres et en joignant les points ainsi obtenus aux trois sommets.*

Je mène la tangente en A au cercle circonscrit ; d'après le théorème XI, le rayon Aa, conjugué harmonique de cette tangente Aa' par rapport aux côtés AB, AC, passe par le pôle du cercle.

On a $\frac{Ba}{aC} = \frac{Ba'}{Ca'}$; mais les triangles semblables ABa', ACa' donnent $\frac{Ba'}{Aa'} = \frac{BA}{AC} = \frac{Aa'}{Ca'}$, et par suite $Ba' = Aa' \cdot \frac{BA}{AC}$, $Ca' = Aa' \cdot \frac{AC}{BA}$; donc $\frac{Ba'}{Ca'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{Ba}{aC}$ c. q. f. d.

Théorème XV. — *Le lieu des points dont les polaires coniques par rapport à un triangle sont des paraboles, est une ellipse tangente aux trois côtés en leurs milieux.*

Je cherche le nombre des points du lieu situés sur une transversale quelconque ; les polaires de tous les points de cette droite forment un faisceau de coniques passant par quatre points ; mais dans un pareil faisceau il y a toujours deux coniques tangentes à une droite donnée, en particu-

lier deux coniques tangentes à la droite à l'infini, c'est-à-dire deux paraboles. Le lieu est donc une conique. Je prends maintenant pour transversale un des côtés; d'après le théorème XII, les polaires coniques de tous les points de ce côté se composent du côté lui-même et d'une droite passant par le sommet opposé. Pour le point milieu les deux droites deviennent parallèles, la polaire conique rentre dans le genre parabole; le point milieu est d'ailleurs le seul qui jouisse de cette propriété. On conclut de là que le lieu cherché touche les trois côtés en leurs milieux.

C'est une ellipse dont le centre est au centre de gravité du triangle; elle partage le plan en deux régions; pour tous les points intérieurs à l'ellipse les polaires sont des ellipses, pour tous les points extérieurs ce sont des hyperboles.

Théorème XVI. — *Le lieu des points dont les polaires coniques par rapport à un triangle sont des hyperboles équilatères est une droite, polaire rectiligne du point de concours des hauteurs.*

En effet les polaires coniques de tous les points de cette polaire rectiligne passent par son pôle; or l'on sait que toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de concours des hauteurs et réciproquement toute conique passant par ce point et par les trois sommets est une hyperbole équilatère. *(A suivre.)*

NOTE SUR LE TRIANGLE

Traduit de l'anglais de l'ouvrage *a Treatise on some new geometrical methods.*

Par **James Booth**, membre de la Société Royale de Londres.

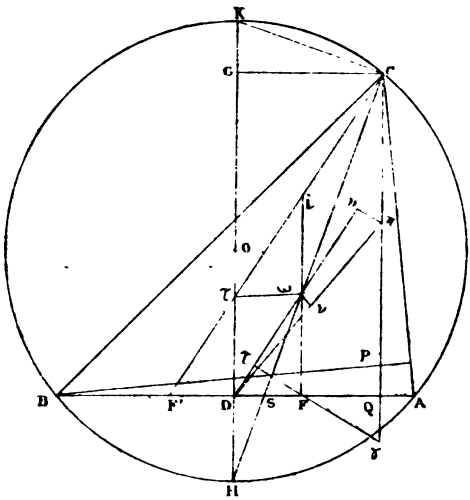
(Suite et fin, voir page 329.)

---

51. *Le cercle des neuf points d'un triangle touche le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits.*

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et soit ν le centre du cercle des neuf points qui passe par le

milieu D de AB, et par le milieu π de PC. On sait que $D\pi = R$, rayon du cercle circonscrit. Soit ω le centre du cercle inscrit dont le rayon est r, et qui touche la base AB au point F. Soit Q le pied de la perpendiculaire CP sur AB.



Menons $D\omega$, et abaissons la perpendiculaire $\pi\upsilon$ sur cette droite. Appelons d la distance $\nu\omega$ entre le centre du cercle des neuf points et le centre du cercle inscrit, et ε l'angle de $D\nu$ avec $D\omega$. Alors, puisque l'on a $D\omega^2 = \frac{(a-b)^2}{4} + r^2$, on aura

$$d^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{4} + r^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} \frac{\sqrt{(a-b)^2+4r^2}}{2} \cos \varepsilon.$$

Posons $\quad K = F\sqrt{(ai-b)^2 + 4r^2}$ (*)

On en déduit

$$4d^2 = R^2 + (a-b)^2 + 4r^2 - 2RK \cos \varepsilon \quad (112)$$

(*) Cela revient à démontrer que $Fi = 2r$. En effet, on a $FF' = a - b$, et comme (n° 27) $DQ = \frac{a^2-b^2}{2c}$, on en tire $F'Q = \frac{a-b}{2}\left(1 + \frac{a+b}{c}\right)$ ou $F'Q = \frac{(a-b)\,p}{c}$. Donc $\frac{Fi}{CQ} = \frac{c}{p}$, d'où $CQ \cdot c = Fi \cdot p$; mais $CQ \cdot c = 2\Delta$; donc $Fi \cdot p = 2pr$; d'où $Fi = 2r$.

Mais $2DQ = \frac{a^2 - b^2}{c}$, et $DF = \frac{a - b}{2}$;

donc $$DQ - DF = FQ = \frac{(a - b)(p - c)}{c} \qquad (113)$$

Sur $D\omega$, abaissons la perpendiculaire $F\nu$, et prolongeons-la jusqu'en γ où elle rencontre PQ; on a $QK = FQ \operatorname{tg} QF\gamma$; mais on a $\operatorname{tg} QF\gamma = \frac{a - b}{2r}$; en substituant on trouve

$$Q\gamma = \frac{(a - b)^2 (p - c)}{2cr} \qquad (114)$$

Appelons θ l'angle KCG ou son égal KHC. On a

$$KG = KC \sin\theta, \quad \text{et } KC = 2R \sin\theta; \text{ d'où}$$

$$KG = 2R \sin^2\theta \qquad (115)$$

Mais $\sin^2\theta = \frac{\tau\omega^2}{H\omega^2} = \frac{(a - b)^2}{4HA^2} = \frac{(a - b)^2}{4 \,.\, 2R \,.\, HD}$

Donc

$$2R \sin^2\theta = \frac{(a - b)^2}{4 \,.\, \frac{1}{2} c \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \frac{(a - b)^2 (p - c)}{2cr} \qquad (116)$$

Par suite $$KG = Q\gamma \qquad (117)$$

Il en résulte que $C\gamma = KD$, et par suite que $\pi\gamma = R$ (118)

Cela nous donne une nouvelle et très-importante propriété du cercle des neuf points.

Puisque $D\upsilon$ est la projection de $D\pi$ ou R sur la ligne $D\omega$, et que, en même temps, il est la projection sur la même droite, de $\pi\gamma$ ou R et de DF, on a

$$R \cos\varepsilon = R \sin\delta + \frac{1}{2}(a - b) \cos\delta \qquad (119)$$

en appelant δ l'angle ωDF; mais

$\sin\delta = \frac{2r}{K}$, $\cos\delta = \frac{a - b}{K}$, en posant $K = \sqrt{(a - b)^2 + 4r^2}$.

Donc $$2RK \cos\varepsilon = 4Rr + (a - b)^2.$$

En remplaçant dans la formule 112, on trouve

$$4d^2 = R^2 + 4r^2 - 4Rr,$$

ce qui devient après réduction

$$d = \frac{1}{2} R - r. \qquad (120)$$

52. Soient d', d'', d''' les distances du centre du cercle des neuf points aux centres des cercles ex-inscrits; on trouvera facilement par des modifications simples de la figure:

$$d' = \frac{1}{2}R + r'; \quad d'' = \frac{1}{2}R + r''; \quad d''' = \frac{1}{2}R + r''' \quad (121)$$

En ajoutant ces résultats, on trouve

$$d + d' + d'' + d''' = 2R + r' + r'' + r''' - r = 6R \quad (122)$$

On a vu (form. 47) que si l'on appelle D, D', D'', D''' les distances du centre du cercle circonscrit aux mêmes points, on a $D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 12R^2$.

Donc $D^2 + D'^2 + D''^2 + D'''^2 = 2R(d + d' + d'' + d''')$ (123)

Par suite : *la somme des carrés des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle aux quatre centres des cercles inscrits et ex-inscrits est égale au produit du diamètre du cercle circonscrit par la somme des distances du centre du cercle des neuf points aux quatre mêmes points.*

Nous allons donner une autre preuve de cet important théorème.

53. Soit ABC le triangle donné, comme précédemment, dans le cercle circonscrit, dont le rayon est R, et dont le centre est en O. Soient F et F' les points auxquels le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit touchent la base AB ou c. Alors $BF' = p - a$; $AF = p - b$.

Soient ν le centre des neuf points, et ω le centre du cercle inscrit. Menons CF'. On peut facilement démontrer que la ligne CF' ou f' passe par le point i, extrémité du diamètre du cercle inscrit qui passe par le point F, point de contact avec AB. Soit $D\pi$ le diamètre du cercle des neuf points. OD est égal et parallèle à $C\pi$, OC ou R est égal et parallèle à $D\pi$, et $\frac{r}{DF} = \frac{2r}{FF'}$, $D\omega$ est parallèle à CF' ou f'; donc l'angle OCF' est égal à l'angle $\nu D\omega$. Appelons ε cet angle, et posons $OF' = u$; puisque AOB est isoscèle, on trouve facilement

$$R^2 = u^2 + (p - a)(p - b) \quad (124)$$

Mais $u^2 = R^2 + f'^2 - 2Rf' \cos \varepsilon$

Donc $2f'R \cos \varepsilon = f'^2 + (p - a)(p - b)$ (125)

Soit δ l'angle que fait CF' ou f' avec la base AB du triangle; alors comme CF' est parallèle à Dω, on a

$$\cos\delta = \frac{a-b}{K}, \text{ et } f'\cos\delta = FF' + FQ.$$

Mais $FF' = a - b$, et $FQ = \dfrac{(a-b)(p-c)}{c}$ (v. f. 113).

Donc $$f'\cos\delta = \frac{p}{c}(a-b),$$

et par suite $$f' = \frac{pK}{c} \qquad (126)$$

On a donc

$$2RK\cos\varepsilon = \frac{pK^2}{c} + \frac{c}{p}(p-a)(p-b) \qquad (127)$$

Maintenant on a, comme on l'a vu dans la formule (112)

$$4d^2 = R^2 + (a-b)^2 + 4r^2 - 2RK\cos\varepsilon.$$

On en tire

$$4d^2 = R^2 + (a-b)^2 + 4r^2 - \frac{pK^2}{c} - \frac{c}{p}(p-a)(p-b).$$

Mais $$\frac{c}{p}(p-a)(p-b) = cp - c(a+b) + \frac{abc}{p};$$

puis on a $\dfrac{abc}{p} = 4Rr$, et $-c(a+b) = c^2 - 2pc$.

En faisant ces substitutions, on trouve pour l'équation

$$4d^2 = (R-2r)^2 + (a-b)^2 - \frac{p}{c}\left[(a-b)^2 + 4r^2\right] - c^2 + pc$$

en réduisant on trouve comme précédemment

$$d = \frac{1}{2}R - r.$$

54. La démonstration du cas où l'on prend le cercle circonscrit diffère un peu de la précédente. Joignons le centre du cercle circonscrit au point F où le cercle inscrit touche la base. Alors on a, comme précédemment

$$R^2 = u^2 + (p-a)(p-b).$$

Soit I le point où CF rencontre la circonférence du cercle ex-inscrit. I est l'extrémité du diamètre F'Ω, et comme IΩ = ΩF', et F'D = DF, la ligne DΩ est parallèle à CF ou f, et OC est parallèle à Dν, comme précédemment. Si

nous posons OCF $= \varepsilon$, l'angle ΩD_ν, dans le triangle ΩD_ν, est égal à $\pi - \varepsilon$, puisque les côtés de ce triangle sont parallèles à ceux du premier. Dans le premier triangle, on a $u^2 = R^2 + f^2 - 2\,Rf \cos \varepsilon$

et $R^2 = u^2 + (p - a)(p - b)$.

On a aussi, en posant $\Omega_\nu = d'$

$$4\,d'^2 = R^2 + \left[(a-b)^2 + 4r'^2\right] - 2\,R\left[(a-b)^2 + 4r'^2\right]^{\frac{1}{2}} \cos(\pi - \varepsilon).$$

En appelant K′ la valeur $\left[(a-b)^2 + 4r'^2\right]^{\frac{1}{2}}$, et remplaçant cos ε par la valeur trouvée précédemment, en remarquant que $f = \dfrac{K'(p-c)}{c}$, on trouve

$$4d'^2 = R^2 + K'^2 + \frac{p-c}{c}\,K'^2 + \frac{(p-a)(p-b)c}{(p-c)} \quad (128)$$

En remplaçant K′ par sa valeur, et remarquant que

$$\frac{abc}{p-c} = 4Rr',$$

on trouve

$$4d'^2 = (R + 2r')^2 + (a-b)^2 + \frac{p-c}{c} \cdot 4r'^2$$
$$+ \frac{p-c}{c}(a-b)^2 - pc$$

qui, après réduction, donne

$$d' = \frac{1}{2}\,R + r'.$$

55. Les lignes f et f' menées du sommet C du triangle aux points de contact F et F′ de la base c avec les cercles inscrit et ex-inscrit ont une grande importance. Nous avons prouvé plus haut que ces lignes passent par l'extrémité du diamètre du point de contact. Posons

$$4r'^2 + (a-b)^2 = K'^2; \quad 4r^2 + (a-b)^2 = K^2;$$

nous avons vu que l'on a

$$f' = \frac{p}{c}.K; \quad f = \frac{p-c}{c}.K'.$$

Si l'on appelle h et h' les distances du sommet C du triangle à l'autre extrémité du diamètre du cercle inscrit

ou du cercle ex-inscrit, on a

$$h' = \frac{p-c}{c} \text{ K}; \quad h = \frac{p}{c} \cdot \text{K}'.$$

Donc, $ff' = hh'$; en d'autres termes, la surface du triangle CFF' est égale à celle du triangle iCI, i et I étant les autres extrémités du diamètre du cercle inscrit ou ex-inscrit.

Les lignes f, f', la bissectrice de l'angle en C du triangle, et la hauteur forment un faisceau harmonique. Car nous avons vu (n° 28) que DF est moyen proportionnel entre DQ et Ds. Donc, puisque D est le milieu de FF', il en résulte que s et Q sont des points conjugués par rapport à F et F'.

On a $\quad Fs = \frac{p-c}{(a+b)}(a-b); \quad F's = \frac{p}{(a+c)}(a-b).$

Donc $\quad \frac{FS}{F'S} = \frac{p-c}{p} = \frac{r}{r'}.$

Donc le rapport des distances du point s aux points F et F est égal au rapport des rayons des cercles inscrit et ex-inscrit.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Sur le quadrilatère inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre.

Par M. R. **Malloizel**, professeur à Sainte-Barbe.

Je rappelle les théorèmes suivants dont j'aurai à me servir plus loin :

1. — Soit (*fig. 1*) ρ le rayon d'une circonférence et α la distance de son centre O à un point P. Si on transforme cet te circon-

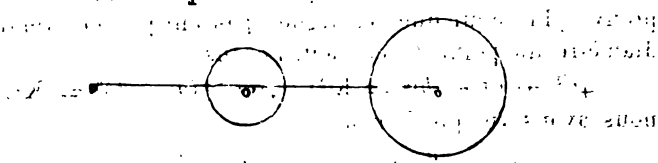


Fig. 1.

férence par rayons vecteurs réciproques, en prenant P comme pôle, on obtient un circonférence de centre O' et de rayon ρ'

donné par la formule $\rho' = \frac{\mu\rho}{\alpha^2 - \rho^2}$, (1)

μ désignant la puissance de transformation. La distance PO', que je désigne par α', est d'ailleurs fournie par l'égalité

$$\alpha' = \frac{\mu\alpha}{\alpha^2 - \rho^2}. \quad (2)$$

2. — Étant donnés une circonférence O et un point A pris dans son plan *(fig. 2)*, si on fait tourner un angle droit BAC autour de son sommet A, le lieu du point milieu E de la corde hypoténuse BC est une circonférence dont le centre est le point milieu D de OA et le rayon m donné par la formule

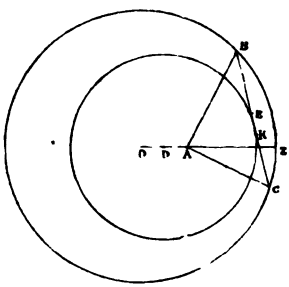


Fig. 2.

$$m = \frac{\sqrt{2r^2 - a^2}}{2}$$

en appelant r le rayon de la circonférence O, et en désignant par a la distance OA. — On sait aussi que le lieu de la projection K du point A sur BC est la même circonférence.

Proposons-nous maintenant la question suivante :

L'angle droit BAC *tournant autour de son sommet fixe* A, *cherchons le lieu du point* T *de rencontre des tangentes en* B *et* C *à la circonférence* O *(fig. 3).*

La ligne OE, qui joint le point O au point E, milieu de BC, est perpendiculaire sur BC, et passe au point T. Si l'on mène OC, on a, dans le triangle rectangle OCT

$$OC^2 \text{ ou } r^2 = OE.OT$$

d'où $OT = \frac{r^2}{OE}$.

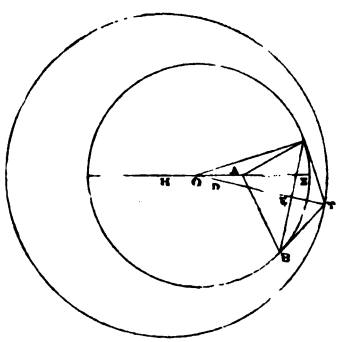


Fig. 3.

Le lieu du point T est donc la figure transformée de la circonférence DE par rayons vecteurs réciproques; le pôle de transformation est le point

O, et la puissance est r^2. Si nous désignons le rayon de cette circonférence par R, et la distance de son centre H au point O par d, on obtient en appliquant les formules (1) et (2) où l'on fait, $\rho = \frac{\sqrt{2r^2 - a^2}}{2}$, $\alpha = \frac{a}{2}$,

$$(3) \qquad R = \frac{r^2(2r^2 - a^4)}{a^2 - r^2}. \qquad (4) \quad d = \frac{r^2 a}{a^2 - r^2}.$$

Discussion. Faisons varier le point A sur le diamètre OD. Quand le point A est en O, le cercle DE a son centre D au point O, son rayon est égal à $\frac{r}{\sqrt{2}}$; le cercle HT a aussi son centre en O; son rayon égal à $r\sqrt{2}$. La figure OBTC est un carré.

Quand le point A se déplace de O vers Z, en restant à l'intérieur de la circonférence OI, le rayon m va en diminuant, tandis que le rayon R va en augmentant. Quand le point A arrive en Z, la circonférence DE devient la circonférence décrite sur OZ comme diamètre, et la circonférence HT devient la tangente en Z au cercle OZ.

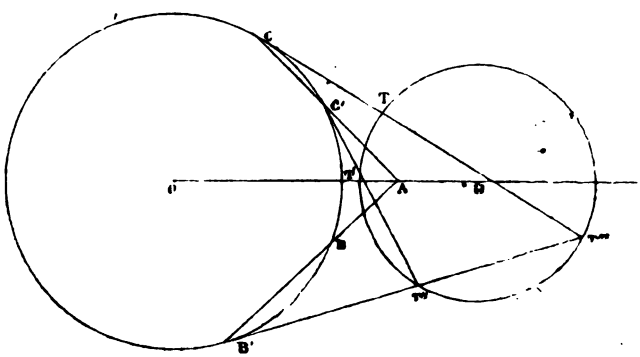


Fig. 4.

Quand le point A se déplace à droite du point Z, m continue à diminuer; R diminue aussi; le cercle HT devient extérieur au cercle OZ et ne le renferme plus, comme dans la figure 3; le centre H, qui est d'abord à l'infini à droite du point O, se rapproche de ce point.

Enfin, quand le point A prend une position L telle que

$OL = r\sqrt{2}$, les rayons m et R deviennent nuls, et les cercles correspondants se réduisent aux points D et L. Les tangentes menées du point L à la circonférence OZ sont rectangulaires.

Remarques. — Revenons au problème précédent, et prolongeons les côtés AB et AC jusqu'à la circonférence en B′ et C′. Nous obtiendrons en même temps trois autres points du lieu, T′, T″, T‴, fig. 4 et 4 *bis*. On a ainsi un quadrilatère TT′T″T‴, qui est circonscrit à la circonférence donnée OZ et inscrit à la circonférence HT. Il y a un nombre infini de quadrilatères remplissant les deux conditions précédentes. On peut remarquer que les lignes BB′, CC′, qui joignent les points de contact des côtés opposés sont rectangulaires.

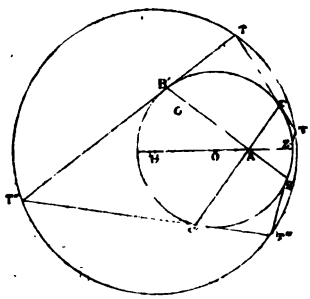


Fig. 4 bis.

Éliminons maintenant a entre les relations (3) et (4). Divivons ces deux égalités membre à membre; il vient, en élevant au carré

$$a^2R^2 = d^2(2r^2 - a^2)$$

d'où l'on tire

$$a^2 = \frac{2r^2d^2}{R^2 + d^2}$$

Portons cette valeur de a dans l'équation (4) dont on a élevé les deux membres au carré, on trouve, tout calcul fait

$$(d^2 - R^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$

Telle est la relation qui existe entre les rayons r du cercle inscrit et R du cercle circonscrit, et la distance d de leurs centres.

Je proposerai au lecteur les théorèmes suivants, dont les démonstrations s'appuient sur ce qui précède :

1. *Dans tout quadrilatère à la fois circonscrit à un cercle et inscrit dans un autre, les lignes qui joignent les points de contact des côtés opposés se coupent à angle droit.*

2. *Réciproquement, tout quadrilatère circonscrit à un cercle est inscriptible dans un autre si les lignes qui joignent les points de contact des côtés opposés sont rectangulaires.*

3. *Quand un quadrilatère est inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, on peut inscrire dans le premier une infinité de quadrilatères qui soient circonscrits au second. Les cordes qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par un point fixe.*

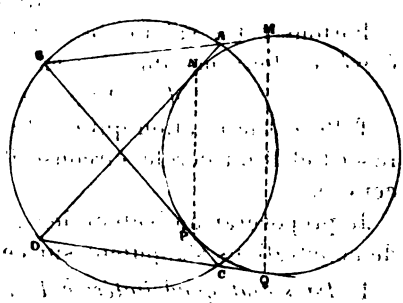
4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse circonscrire à un cercle de rayon* r *un quadrilatère inscrit dans un autre cercle de rayon* R *est, en appelant* d *la distance des centres, qu'il existe entre les quantités* r, R, d, *la relation*

$$(d^2 - R^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2).$$

Remarque I. — Cette équation est du second degré en d^2; il est intéressant de la discuter en comparant les racines aux quantités $(R - r)^2$ et $(R + r)^2$, qui ne comprennent jamais une racine. Ces racines sont d'ailleurs toujours réelles; l'une d'elles, plus grande que $(R + r)^2$, donne toujours deux circonférences extérieures l'une à l'autre; l'autre, plus petite que $(R - r)^2$, n'est positive que dans le cas où R est supérieur à $r\sqrt{2}$, et donne une figure analogue à la figure 3.

On retrouve facilement toute la discussion faite antérieurement, et l'on voit immédiatement les positions relatives du quadrilatère et des deux circonférences, qui ne sont jamais sécantes.

Remarque II. — Les théorèmes que j'ai donnés précédemment ne s'appliquent qu'au quadrilatère convexe. Il est facile de voir qu'un quadrilatère concave à la fois circonscrit et inscrit a ses côtés opposés égaux. Ceci résulte de l'égalité des angles B et C, qui donne MN = PQ (*fig.* 5). NP et MQ sont deux droites parallèles.



(*Fig.* 5)

Réciproquement un quadrilatère concave qui a ses côtés opposés égaux est inscriptible et circonscriptible.

Dans ce cas, les deux circonférences sont toujours sécantes.

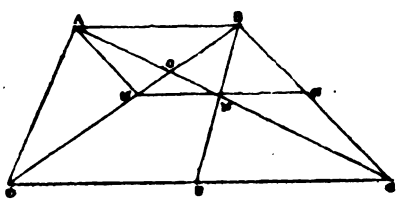
THÉORÈME SUR LE TRAPÈZE

Par Maurice d'Ocagne.

Voici un théorème que je crois nouveau et qui me semble assez remarquable par sa grande simplicité et par les conséquences qui s'en déduisent :

Théorème. — *Si par les extrémités d'une des bases d'un trapèze on mène des parallèles aux côtés obliques de ce trapèze; 1° la droite qui joint les points d'intersection de ces droites avec les diagonales est parallèle aux bases; 2° la longueur de cette ligne est troisième proportionnelle aux longueurs des bases.*

Soit le trapèze ABCD ; par le sommet A je mène AM, parallèle à BC, qui rencontre BD en M ; par B je mène BN, parallèle à AD, qui rencontre AC en N.



1° Je dis que MN est parallèle aux bases.

En effet, la similitude des triangles OBN, ODA donne

$$\frac{ON}{OA} = \frac{OB}{OD}.$$

De même, la similitude des triangles OAM, OCB donne

$$\frac{OM}{OB} = \frac{OA}{OC}$$

et comme

$$\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

il en résulte

$$\frac{ON}{OA} = \frac{OM}{OB}$$

c'est-à-dire que MN est parallèle à AB.

2° Je dis maintenant que $\frac{CD}{AB} = \frac{AB}{MN}$.

Pour le prouver je prolonge BN jusqu'en sa rencontre E avec CD, et MN jusqu'en sa rencontre H avec BC.

La similitude des triangles BDE, BMN donne alors

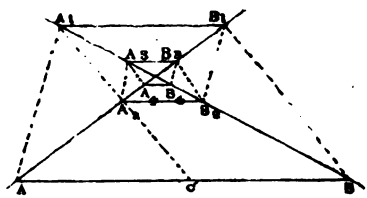
$$\frac{DE}{MN} = \frac{BD}{BM} \text{ ou } \frac{AB}{MN} = \frac{BD}{BM}.$$

De même, la similitude des triangles BDC, BMH donne

$$\frac{DC}{MH} = \frac{BD}{BM} \text{ ou } \frac{DC}{AB} = \frac{BD}{BM}.$$

Par suite $$\frac{DC}{AB} = \frac{AB}{MN} \qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

Application. — Comme conséquence immédiate de ce théorème, nous avons une construction géométrique facile des termes d'une progression par quotient :



Je trace une ligne AB égale au premier terme de la progression donnée; sur une parallèle quelconque à cette droite je porte, à partir de n'importe quelle origine, une longueur A_1B_1 égale à $q \times AB$ si q est la raison.

Je mène alors les droites AA_1, BB_1, AB_1, BA_1.

Puis par A_1 et B_1 je mène des parallèles respectivement à BB_1 et à AA_1. Je détermine ainsi les points A_2 sur AB_1, B_2 sur BA_1. D'après le théorème démontré, A_2B_2 est parallèle à A_1B_1 et on a $$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1B_1}{AB} = q.$$

De même en menant par A_2 et B_2 des parallèles respectivement à AA_1 et à BB_1, on obtient sur A_1B et B_1A les points A_3 et B_3, A_3B_3 est parallèle à A_2B_2 et on a

$$\frac{A_3B_3}{A_2B_2} = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = q$$

et ainsi de suite.

La suite des droites AB, A_1B_1, A_2B_2,. . . fournit donc les termes successifs de la progression considérée.

Dans l'exemple actuel, nous avons supposé la raison inférieure à l'unité, comme l'indique la figure, puisque $A_1B_1 < AB$.

On sait que dans ce cas la somme des termes de la pro-

gression tend vers une limite S dont la valeur est

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

D'après la construction effectuée on voit que

$$S = \frac{AB}{1 - \frac{A_1B_1}{AB}} = \frac{\overline{AB}^2}{AB - A_1B_1}$$

ou

$$S = \frac{\overline{AB}^2}{AC}$$

ce qui fournit une facile construction de cette limite.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. G. Kœnigs, élève au Lycée Saint-Louis.

Théorème. — *Soient* ABC *un triangle,* α, β, γ *les pieds des hauteurs* Aα, Bβ, Cγ, *qui se coupent en* H. *Soient aussi* a *le point où se coupent* CB *et* $\gamma\beta$, *et* I *le milieu de* BC. *Les droites* AI, aH *se coupent à angle droit.*

En effet, menons AM parallèle à BC. Les quatre droites AM, AI, AB, AC forment un faisceau harmonique; il en est de même du faisceau des quatre droites Hα, Ha, HC, HB, puisque le quadrilatère Cβγ B est inscriptible; mais trois des droites de ce dernier faisceau sont perpendiculaires à trois droites du premier; donc les quatrièmes droites AI, Ha, sont aussi rectangulaires. Cela résulte de la réciproque de cette proposition que le faisceau des perpendiculaires issues d'un point sur quatre rayons d'un faisceau harmonique est lui-même harmonique.

Appliquons ce théorème au problème suivant : *Trouver le lieu d'un point* A *tel que les hauteurs du triangle* ABC *formé*

par les tangentes issues de A *à une conique donnée et la polaire de ce point se coupent sur la courbe.*

Construisons la droite aH comme précédemment; Aα est la polaire de a, donc aH est tangente en H. Du reste, le diamètre OA passe par I, milieu de BC (O est le centre de la conique); donc en vertu du théorème précédent ce diamètre est perpendiculaire en K à Ha. En outre, le cercle circonscrit au triangle Aαa passe par K, puisque l'angle en K et l'angle en α sont droits. La puissance du centre O par rapport à ce cercle est donc OK $\times$ OA; mais le triangle Aαa est autopolaire; la puissance du centre par rapport au cercle circonscrit est donc, en vertu du théorème de Faure, égale à $a^2 + b^2$. On a donc:

$$OK \times OA = a^2 + b^2.$$

Donc enfin le lieu de A est la polaire réciproque de la conique proposée par rapport au cercle concentrique et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. On sait que ce cercle est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.

Problème. — *On donne une ellipse, et en un point* M *on mène la normale* MN. *Soit* P *le pôle de cette normale; trouver le lieu décrit par le pied de la perpendiculaire issue de* P *sur le diamètre* OM.

Soit Q le pied de la perpendiculaire issue de P sur OM *. Le cercle circonscrit au triangle MPQ est tel que la puissance du centre O de la conique est égale à OM. OQ; d'autre part il est tangent en M à la normale MN. Ce cercle passe donc par le point P et est tangent en M à la polaire de ce point. Considérons deux points R et S divisant harmoniquement le segment MN. Le triangle PRS est autopolaire; la puissance du centre de la conique par rapport au cercle circonscrit est donc égale à $(a^2 + b^2)$ (*Th. de Faure*). Si on suppose que R se rapproche de M, S tendra aussi vers M, et à la position limite, le cercle passera par P et sera tangent à MN.

On aura donc $\quad OM \times OQ = a^2 + b^2.$

* Le lecteur est prié de faire la figure.

Ce qui montre que le lieu du point Q est la figure inverse de la conique, le centre étant le pôle, et $(a^2 + b^2)$ la puissance d'inversion.

NOTE

SUR UN PROBLÈME CLASSIQUE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Gino Loria.**

Dans presque tous les traités de géométrie élémentaire, comme application des propriétés fondamentales du cercle, on résout le problème suivant : *sur une droite donnée, construire un segment capable d'un angle donné.*

La solution qu'on en donne, due aux géomètres grecs, est très rigoureuse; mais elle nous semble un peu difficile pour ceux qui commencent l'étude des mathématiques.

Nous croyons qu'on n'a jamais remarqué la solution très simple que nous allons signaler.

Soit A l'angle donné, m, la longueur de la droite; d'un point quelconque B de l'un des côtés de l'angle donné, avec une ouverture de compas égale à m, décrivons un arc de cercle qui coupera l'autre côté de l'angle en deux points C et C'. Circonscrivons une circonférence au triangle ABC (ou à ABC'). Le problème reviendra ensuite à construire un cercle de rayon donné, et passant par deux points donnés, les extrémités de la droite M.

Note de la rédaction. — Un avantage considérable de cette méthode est que, par suite de la position arbitraire du point B, on peut faire en sorte que l'un des angles du triangle ABC soit voisin d'un angle droit, ce qui donnera une plus grande précision pour la détermination du centre, et par suite du rayon du cercle cherché. De plus, au point de vue graphique, elle est un peu plus courte que la méthode ordinaire, sans être moins rigoureuse. A. M.

CONCOURS ACADEMIQUE

AIX 1879

Étant donné un triangle ABC, on prend sur les trois côtés des points a, b, c, tels que

$$\frac{Ba}{Ca} = \frac{Cb}{Ab} = \frac{Ac}{Bc} = \frac{p}{q}.$$

On demande : 1° de construire le triangle ABC connaissant les longueurs des droites Aa, Bb, Cc ;

2° De calculer les côtés du triangle donné en fonction de ces longueurs, et de discuter les valeurs ainsi obtenues ;

3° De considérer le cas particulier où l'on a $\frac{p}{q} = 1$.

BESANÇON ET NANCY 1879

Par le sommet O d'un triangle OAB, on élève une perpendiculaire OC au plan du triangle ; les droites OA et OB restent fixes, ainsi que le point C ; les points A et B se déplacent de façon que AB conserve une valeur constante. Trouver le minimum de l'angle ACB ; l'angle AOB est aigu. Prenant $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = h$, $AB = c$, $AOB = \theta$, $ACB = C$, et supposant $c = h tg\theta$, on déterminera dans ce cas particulier pour combien de positions de la ligne AB l'angle C prend une valeur donnée, et les limites entre lesquelles varie cet angle.

Les données restant les mêmes, démontrer que les deux cercles décrits, l'un du point A comme centre avec le rayon AC, dans le plan ACO, l'autre du point B comme centre avec le rayon BC, dans le plan BCO, déterminent une sphère de rayon constant.

CHAMBÉRY ET GRENOBLE 1879

On donne un rectangle OADB et un cercle dont le centre est en C et qui touche en A le côté OA. On sait qu'il existe deux cercles tangents au précédent et touchant le côté OB en B. Si Q et Q′ sont les centres de ces cercles, G et G′ les points où ils touchent le cercle, C, H et H′ les points où OA est rencontré par les tangentes en G et G′ au cercle C, on demande d'étudier les variations des longueurs CQ, CQ′, QQ′ et HH′ quand le centre C du premier cercle se meut sur AD, en se bornant aux cas où le point B reste extérieur à ce cercle.

MONTPELLIER 1879

Deux cônes de même hauteur ont pour base commune un cercle donné, les sommets étant situés de part et d'autre du plan de cette base. On demande de déterminer une section circulaire du premier et une section circulaire du second

telles que, en prenant ces sections pour bases d'un tronc de cône, l'apothème et la surface totale du tronc de cône soient égales à des quantités données.

MONTPELLIER 1867

Quelle relation existe entre les côtés d'un triangle rectangle circonscrit à un cercle donné? Parmi tous ces triangles, trouver celui : 1° dont un côté de l'angle droit a une longueur donnée; 2° dont le périmètre est minimum; 3° dont les côtés forment une progression arithmétique.

QUESTIONS DIVERSES

CONCOURS ACADÉMIQUES

Etant donnés quatre points A, B, C, D, en ligne droite, on décrit sur AB un segment quelconque et sur CD un segment capable du même angle. Trouver le lieu géométrique du milieu de la corde d'intersection des deux cercles lorsque l'angle commun des deux segments vient à varier.

(Concours Montpellier 1870.)

— Soit O un point quelconque pris dans le plan du triangle ABC; soient E, F, G les milieux des côtés. — Démontrer que le système des forces OA, OB, OC est équivalent au système OE, OF, OG.

(Bordeaux, concours acad. Ens. spécial 1878.)

— Soit ABC un plan incliné de 30° sur l'horizon. On propose de déterminer les points M et N, de telle manière que la longueur MN, supposée égale à AB soit parcourue par un point pesant parti sans vitesse du point A, dans le même temps que la hauteur AB serait parcourue par un autre point pesant tombant librement de A.

(Bordeaux, concours acad. Ens. spécial 1878.)

— On a un levier AB du poids de 1 kilogr. fixé en C; AC = 0m,2; BC = 0m,3. Un poids D de 3 kilogr. est soutenu par les deux fils AD et BD, longs de 0m,4 et 0m,3. On demande quelle force verticale il faut appliquer en A pour maintenir le levier dans une position horizontale.

(Bordeaux, conc. acad. Ens. spéc. 1875.)

— On donne une droite rigide AB de 0m,40; on applique à ses extrémités deux forces AF et BF′ agissant dans un même plan et égales chacune à 6 kilogr. AF fait avec AB un angle de 150° et BF′ un angle de 120°. On demande en quel point de AB il faut appliquer une force pour maintenir AB en équilibre, quelle est l'intensité de cette force et quel est l'angle qu'elle fait avec AB? — On demande quelle doit être l'intensité de la force BF′ pour que la force qui doit maintenir AB en équilibre passe par le milieu de cette droite.

(Bordeaux, conc. acad. Ens. spéc.)

— Un plan horizontal repose sur une sphère par un point O. On place sur ce plan un poids de 14 kilogr. en un point A, et un poids de 21 kilogr. en un

point B. On demande en quel point C il faudra placer un poids de 25 kilogr. pour que l'équilibre ne soit pas rompu. La distance OI du point O à la droite AB est de $0^m,5$; $AI = 0^m,6$; $BI = 0^m,4$. *(Concours acad. Rennes, 1874.)*

— Le filet d'une vis porte 150 spires sur une hauteur de $0^m,36$. La puissance est appliquée à une distance de l'axe égale à 2 mètres. Quelle est la force capable de faire équilibre à un poids d'une tonne appliqué sur la tête de la vis? — Calculer le travail développé pour élever ce poids d'une tonne de $0^m,14$; et vérfiier sur l'exemple proposé le principe de l'égalité de travail de la puissance et de la résistance. *(Bordeaux, concours acad. Ens. spécial.)*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

QUESTION 149.

Solution par M. Bucheron, élève au Lycée de Moulins.

Deux circonférences sont tangentes extérieurement. Sur la ligne des centres comme diamètre on décrit une circonférence et l'on mène la circonférence A *tangente aux trois circonférences ainsi obtenues. Si* R *et* r *sont les rayons des deux premières,* D *le diamètre de la circonférence* A, *on a la relation*

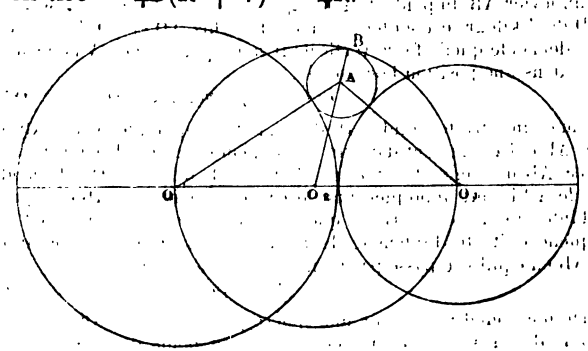
$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r}.$$

Chercher ce qui arrive lorsque les circonférences sont tangentes intérieurement.

Le triangle OAO_1 donne

$$AO^2 + O_1A^2 = 2AO_2^2 + 2OO_2^2$$

On en tire $\quad 4D(R + r) = 4Rr$



d'où en divisant par $4RrD$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{1}{D}.$$

Si les circonférences sont tangentes intérieurement on a

$$\left(R - \frac{D}{2}\right)^2 + \left(r + \frac{D}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{R - r}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{R - r + D}{2}\right)^2$$

ou

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{1}{D}.$$

Nota : Ont résolu la même question : MM. d'Arodes, à Mont-de-Marsan; Faivre et Gindre, à Lons-le-Saulnier; Engelhard, à Troyes; Vazou, collège Rollin; Baudot, à Dijon; Hugot, à Lyon; Lannes, à Tarbes; Dumur, à Chartres; Gélinet, à Orléans; Longueville, à Charleville; Élie, collége Stanislas; Dupuy, à Grenoble; Deslais, au Mans; Lesoille, collège de Sedan.

QUESTION 150.

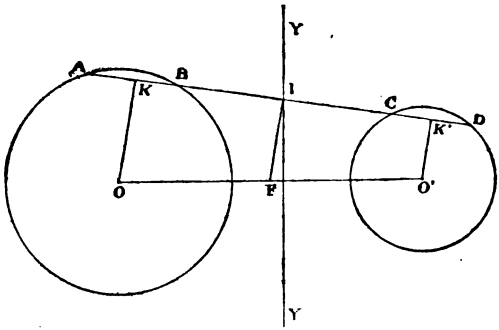
Solution par M. D'ARODES, élève du Lycée de Mont-de-Marsan.

Une droite AD *rencontre deux circonférences* O *et* O′ *de telle sorte que les cordes interceptées* AB *et* CD *soient égales entre elles.*

Trouver : 1° le lieu géométrique du milieu de AD; *2° l'enveloppe de la droite* AD. *En déduire le problème suivant : mener par un point donné dans le plan de deux circonférences une droite telle que les cordes interceptées soient égales.*

1° Puisque AI = ID et que AB = CD, on a évidemment IB = IC. Donc AI . IB = IC . ID. Le point I est donc d'égale puissance par rapport aux deux circonférences, et le lieu de ce point est l'axe radical des deux circonférences.

2° Élevons au point I la perpendiculaire IF jusqu'à la rencontre de OO′. Abaissons OK, OK′ perpendiculaires sur AB et CD. On a IK = IK′, et par suite OF = O′F. Le point F est donc constant, et, d'après une propriété de la parabole, l'enveloppe de la droite AD est une parabole ayant pour foyer le milieu de la ligne des centres et pour tangente au sommet l'axe radical des deux circonférences.



3° Soit P le point donné. Il suffira de mener la directrice de la parabole, et de mener par le point P une tangente à cette parabole déterminée par son foyer et sa directrice.

Nota. — **M. Combebiac, de Montauban, a résolu la même question.**

QUESTION 151.

Solution par M. Vazou, élève du Collège Rollin.

Soit ABC *un triangle,* O *un point de son plan. On mène les droites* OA, OB, OC *qui coupent les côtés en* A', B', C'; *on coupe le triangle* A'B'C' *par une transversale* $\alpha\beta\gamma$ *(*α *est le point où cette transversale rencontre* B'C', *etc...), les droites* Aα, Bβ, Cγ *rencontrent les côtés du premier triangle en trois points qui sont en ligne droite.*

Le triangle β'A'C* coupé par la transversale BβN donne

$$\frac{\beta'\beta}{\beta A'} \cdot \frac{A'B}{BC} \cdot \frac{CN}{N\beta'} = -1.$$

Les triangles γ'BA', α'C'B coupés respectivement par les transversales CγP, AαM donnent

$$\frac{\gamma'P}{PB} \cdot \frac{BC}{CA'} \cdot \frac{A'\gamma}{\gamma'} = -1$$

$$\frac{\alpha'\alpha}{\alpha C'} \times \frac{C'A}{AB} \times \frac{BM}{M\alpha'} = -1.$$

---

* Le lecteur est prié de faire la figure.

De même les triangles $\alpha'B'C$, $\beta'C'A$, $\gamma'B'A'$ coupés respectivement par les droites $A\alpha M$, $B\beta N$, $C\gamma P$ donnent également

$$\frac{\alpha'M}{MC} \times \frac{CA}{AB'} \times \frac{B'\alpha}{\alpha\alpha'} = -1$$

$$\frac{\beta'N}{NA} \times \frac{AB}{BC'} \times \frac{C'\beta}{\beta\beta'} = -1$$

$$\frac{\gamma\gamma'}{\gamma B'} \times \frac{B'C}{CA} \times \frac{AP}{P\gamma'} = -1$$

multipliant toutes ces égalités membre à membre il vient

$$\frac{AP}{PB} \times \frac{BM}{MC} \times \frac{CN}{NA} \times \frac{AC'}{C'B} \times \frac{BA'}{CB'} \times \frac{CB'}{B'A}$$

$$\times \frac{A'\gamma}{\gamma B'} \times \frac{B'\alpha}{\alpha C'} \times \frac{C'\beta}{\beta A'} = +1$$

or $$\frac{AC'}{C'B} \times \frac{BA'}{A'C} \times \frac{CB'}{B'A} = +1$$

et $$\frac{A'\gamma}{\gamma B'} \times \frac{B'\alpha}{\alpha C'} \times \frac{C'\beta}{\beta A'} = -1$$

par suite $$\frac{AP}{PB} \times \frac{BM}{MC} \times \frac{CN}{NA} = -1$$

Donc les trois points M, N, P sont en ligne droite.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Deslais, au Mans ; Détraz, à Bourg ; Cadot, du lycée Saint-Louis ; Henrique, à Bordeaux ; du Motel, au Lycée Saint-Louis.

QUESTION 152.

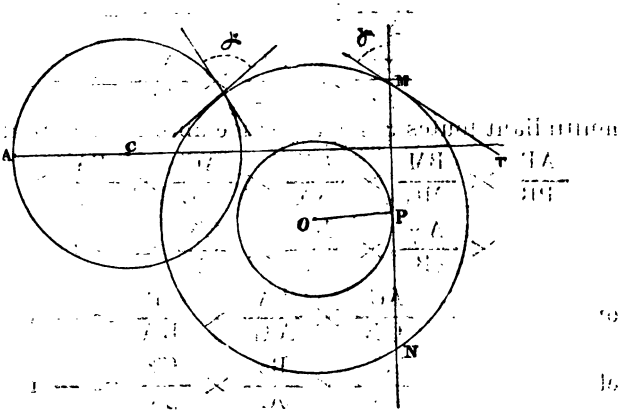
Solution par M. Maurice d'Ocagne, élève au Collége Chaptal.

On a une circonférence fixe O, et un point fixe A ; par le point A, on fait passer une circonférence variable qui coupe la circonférence O sous un angle constant : démontrer que la circonférence variable a pour enveloppe une circonférence.

Considérons une des circonférences C qui passent par A et coupent la circonférence O sous l'angle donné α. Transformons par rayons vecteurs réciproques en prenant le point A pour pôle, et la puissance de ce point par rapport

au cercle O, pour module d'inversion. Le cercle O sera alors anallagmatique.

La circonférence C passant par le pôle aura pour transformée une perpendiculaire MN à AC, coupant la circonférence O sous l'angle α.



L'angle TMN de la tangente à la circonférence et de MN étant constant, l'arc MN et, par suite, la corde MN sont constants; il en résulte que l'enveloppe des transformées telles que MN est la circonférence décrite de O comme centre avec un rayon égal à la perpendiculaire OP abaissée de O sur MN.

Si on revient au système primitif, cette circonférence se transformera en une autre circonférence tangente aux circonférences telles que C. Par suite l'enveloppe de ces dernières est bien une circonférence.

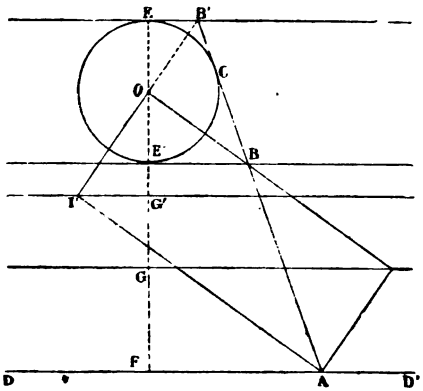
QUESTION 154.

Solution par M. E. Pombart, élève de l'école normale de Charleville.

On donne un cercle O et une droite DD'; soit AC une tangente quelconque de ce cercle, tangente qui rencontre en A la droite DD'. On mène les bissectrices des angles en A, et on projette le centre du cercle sur ces bissectrices; on demande : 1° le lieu de

projection du centre sur ces bissectrices; 2° le lieu du point B *où la tangente variable rencontre la projetante du point* O *sur les bissectrices.*

La figure, construite comme l'indique l'énoncé, est un rectangle. Il faut chercher le lieu des sommets I, I', puis le lieu des points B, B' où les projetantes du centre rencontrent la tangente variable.



B étant le point où la projetante sur AI rencontre CA, menons de ce point une tangente à la circonférence O. Les angles OBC, OBE' sont égaux, il en résulte que BE' est parallèle à DD'. Il en est de même de B'E. Comme pour toute tangente, l'angle BOB' est droit, il s'ensuit que tous les points des tangentes parallèles à DD' sont des points de ce lieu.

Ceci posé, et les droites EF, B'A étant coupées par des parallèles EB', E'B, FA, nous avons

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{E'E}{E'F}$$

ou bien, en désignant E'E par 2R et E'F par d,

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{2R}{d}.$$

Mais les triangles semblables BOB' BIA donnent aussi

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{BO}{BI};$$

par suite

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{BO}{BI} = \frac{2R}{d}.$$

Et comme le point B se déplace sur une parallèle à DD', il en résulte que le lieu du point I est une parallèle à DD'. Il en est de même du lieu du sommet I'.

Cherchons les distances de ces parallèles à BE′ et à B′E.

Les triangles semblables OBE′, OIG donnent

$$\frac{BO}{BI} = \frac{E'O}{E'G} = \frac{R}{E'G},$$

d'où $$\frac{2R}{d} = \frac{R}{E'G};$$

et $$\frac{2}{d} = \frac{1}{E'G},$$

d'où $$E'G = \frac{d}{2}.$$

Les triangles OEB′, OI′G′ donnent aussi

$$\frac{OB'}{OI'} = \frac{OE}{OG'} = \frac{2R}{d}$$

et, comme OE = R,

$$\frac{R}{OG'} = \frac{2R}{d}$$

ou $$\frac{1}{OG'} = \frac{2}{d}$$

d'où $$OG' = \frac{d}{2};$$

par suite

$$EG' = OG' + OE = \frac{d}{2} + R$$
$$= \frac{d + 2R}{2}.$$

Ainsi, 1° le lieu des points I, I′ se compose de deux parallèles indéfinies à la droite DD′, menées par les milieux des distances de la droite DD′ à la *circonférence* O; et 2° le lieu des points B, B′, des deux tangentes parallèles à DD′.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Vermand, de Saint-Quentin; Lannes, de Tarbes; Longueville, à Charleville; Tessier, à Angers; Hoc, à Sainte-Barbe; Bompart, Élie, collége Stanislas; Hugot, de Lyon; Vazou au collège Rollin.

QUESTIONS PROPOSÉES

203. — Démontrer que la surface d'un triangle en fonction des bissectrices l, l' extérieure et intérieure d'un angle et du rapport K des côtés formant cet angle, est donnée par la formule $S = \frac{ll'}{4}\left(\frac{K^2 - 1}{K}\right)$.

(Reboul.)

204. — Du pied A' d'une des hauteurs AA' d'un triangle ABC, on mène les perpendiculaires A'D, A'E; A'K, A'L respectivement sur les côtés AB, AC et sur les deux autres hauteurs BB', CC' du triangle ABC. Démontrer :

1° Que les quatre points D,K,L,E sont en ligne droite ;

2° Que en appelant S la surface du triangle ABC, la surface du triangle A'DE a pour expression

$$S \sin B \sin C \cos B \cos C;$$

3° Que la hauteur A'P du triangle A'DE a pour expression $2R \sin B \sin C \cos B \cos C$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

(Perrin.)

205. — Trouver $2n + 1$ nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des $n + 1$ premiers de ces nombres soit égale à la somme des carrés des n nombres suivants.

(Dostor.)

Le Rédacteur-Gérant,

J. BOURGET.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 22262-9.

TABLE DES MATIÈRES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TOME III

Pages.

Arithmétique.

Propriété des nombres, par *M. G. Dostor* 17
Remarque sur la note précédente, par *M. A. Morel.* 19
Note sur la divisibilité, par *M. d'Ocagne* 43
Théorie de l'incommensurabilité, d'après *M. Songaylo*, par *M. d'Ocagne* . . . 65, 97
Formule d'approximation de la racine carrée, par *M. Burnier* 114
Théorème d'arithmétique, par *M. E. Lemoine* . . . 119
Note sur la divisibilité, par *M. A. Morel* 137
Note sur la soustraction des fractions, par *M. d'Ocagne* 275

Algèbre.

Note sur le second degré, par *M. Kliszowski* . . . 9
Variation du trinôme du second degré. 167
Question de maximum, par *M. Cochez* 230
Sommation des puissances semblables des nombres, par *M. G. Dostor* . . 239, 263
Transformation d'un radical double en somme de radicaux simples, par *M. Thual*. 251
Sur les progressions arithmétiques, par *M. A. Morel.* 294
Sur le minimum d'une expression à plusieurs variables, par *M. d'Ocagne* 304

Géométrie.

Théorie des axes radicaux (suite et fin), par *M. A. Morel* 3
De la directrice de l'ellipse et de l'hyperbole, par *M. Malloizel* 13
Note sur un problème classique, par *M. E. Lemoine.* 21
Note sur la circonférence, par *M. A. Morel* 22
Note sur la parabole, par *M. d'Ocagne* 33
Sur l'application du calcul à la géométrie, par *M. Combier*. . . 79, 120, 129
Sur la section plane du cône droit, par *M. A. Morel*. . 142
Mécanique et géométrie, par *M. ecoq*. 161

Pages.

Note sur le triangle par feu *James Booth*. 177, 202, 233, 268, 298, 329, 359
Note de géométrie, par *M. Lionnet*. 193
Sur la normale à l'ellipse, par *M. Launoy*. 197
Centre des moyennes harmoniques, par *M. Kœhler* 225, 257, 289, 321, 354
Théorème de Faure, par *M. Kœnigs*. 308
Sur le quadrilatère à la fois inscrit et circonscrit, par *M. Malloizel*. 365
Note de géométrie, par *M. d'Ocagne* 370
Note de géométrie, par *M. Kœnigs*. 372
Sur un problème classique, par *M. Gino Loria*. 374

Trigonométrie.

Des erreurs en trigonométrie, par *M. A. Morel*. . 36
Questions d'examen, par *M. A. Morel*. 117

Mélanges.

Éléments de la théorie du lavis, par *M. Pillet* 70, 105, 151, 172, 212, 244
Histoire des mathématiques, par le docteur *Süter*, de Zurich, traduite par *M. A.-G. Melon*. 82

Bibliographie.

Revue de l'enseignement secondaire spécial. . . 62

Correspondance.

Pages.

Avis sur les solutions de questions. 32, 160
Théorème de *M. Julliard* . 63
Rectification de *M. Combier* sur un article de *M. Dostor* 64
Erratum. 128
Note de *M. d'Ocagne* sur un précédent article 352
Avis concernant la modification apportée à la rédaction du journal 353

Questions proposées.

Questions 141 à 145 . . . 31
— 146 à 152 . . . 60
— 153 à 158 . . . 95
— 159 à 162 . . . 128
— 163 à 167 . . . 159
— 168 à 170 . . . 192
— 171 à 180 . . . 223
— 181 à 183 . . . 288
— 184 à 193 . . . 319
— 194 à 202 . . . 350
— 203 à 205 . . . 384

Concours pour les écoles.

École spéciale militaire 1879 182, 283
École navale 1879. 252
École spéciale militaire 1878 composition supplémentaire. 253
École polytechnique 1879 . 280
École centrale 1879. . . . 281
École forestière 1879 . . . 282

Concours généraux.

En 1861 24
En 1862 25
En 1869 46
En 1864 146

Pages.
En 1865 147
En 1866 148
En 1870 149
En 1872 150
En 1879 279

Examens divers.

Ecole polytechnique, questions de mathématiques élémentaires 249
Examens oraux de Saint-Cyr 1879. . . . . .254, 276
Examens en Belgique . . . 346
Examens en Italie. 347

Concours académiques.

Caen. 87, 188
Bordeaux. 207
Douai 208
Lyon 209, 256
Paris 209
Poitiers 210, 255
Rennes. 210
Toulouse. 211
Clermont. 255
Dijon 310
Aix 375
Besançon et Nancy 375
Chambéry et Grenoble. . . 375
Montpellier. 376
Questions diverses de concours académiques 376

Baccalauréat ès sciences.

Besançon 28, 311
Bordeaux. 217, 339
Caen. 89, 156
Clermont. 48, 156
Dijon 89, 311, 337
Grenoble 89
Lille. 311, 340
Lyon. 312
Marseille. 90
Montpellier. 312
Nancy 90, 312
Paris. 156, 337
Poitiers 312
Rennes. 26

Questions résolues.

Question 116, par *M. Reuss* 50
— 118, par *M. Sou*. . 55
— 119, par *M. Jimenez* 53
— 120, par *M. Reuss*. 57
— 121, par *M. Thual*, 58
— 122, par *M. de la Laurencie*. . . 59
— 123, par *M. Cordeau* 91
— 124, par *MM. Faivre* et *Gindre*. 126
— 125, par *M. Deslais*. 9
— 126, par *M. Bompard* 94
— 127, par *M. Raspilaire* 96
— 129, par *M. Lannes* 218
— 130, par *M. Hoc*. . 289
— 131, par *M. Deslais* 189
— 133, par *M. Bompard* . . 219
— 134, par *M. Chalons* . . . 191
— 135, par *M. Landre* 220
— 136, par *M. Cordeau* 221
— 137, par *M. Zuloaga* 284
— 138, par *M. Hoc*. . 286
— 139, par *M. Hénon* 313
— 140, par *M. Blessel* 222
— 141, par *M. Lannes* 314
— 142 et 143 par *M. Vazou* 315
— 144, par *M. Zuloaga* 317

	Pages.
Question 145, par *M. Lannes*	287
— 146, par *M. Ailleret*	347
— 148, par *M. Blessel*	348
— 149, par *M. Bucheron*	377
— 150, par *M. d'Arodes*	378
— 151, par *M. Vazou.*	379
— 152, par *M. d'Ocagne*	380
— 154, par *M. Pombart*	381
Concours académique de Paris, par *M. Gélinet* (copie couronnée)	29
Concours de Poitiers 1879, par *M. Babu* (copie couronnée)	341
Concours de Toulouse 1879, par *M. Lannes* (copie couronnée)	343

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

AILLERET, *à Versailles*, 94, 95, 127, 190, 219, 314, 347.

AMIGUES, *professeur au lycée de Nice*, 96.

ARNOYE, *professeur à Montauban*, 351.

ARODES (d'), *à Mont-de-Marsan*, 190, 319, 350, 378.

BARRIEU, 192.

BABU, *à Niort*, 341.

BAUDOT, *à Dijon*, 288, 350, 378.

BLESSEL, *piqueur des ponts et chaussées, à Paris*, 222, 348.

BOMPARD, *collège Stanislas, à Paris*, 94, 95, 190, 219, 383.

BOOTH (*feu* James), *membre de la Société royale de Londres*, 177, 202, 233, 268, 298, 329, 359.

BUCHERON, *à Moulins*, 60, 94, 95, 190, 350, 377.

BURNIER (le colonel), *à Lausanne*, 114, 223.

CADOT, *lycée Saint-Louis, à Paris*, 315, 317, 319, 380.

CHALONS, *à Angoulême*, 191.

CHARAIRE, *à Bourg*, 190, 219.

CHAVANON, *à Lyon*, 94, 127.

CHESNE, *à La Flèche*, 95.

CHRÉTIEN, *au Havre*, 127.

COCHEZ, *rédacteur*, 230.

COMBEBIAC, *à Montauban*, 94, 348, 379.

COMBIER, *ingénieur en chef des ponts et chaussées*, 64, 79, 120, 129, 351, 352.

CORBEAU, *à Saint-Quentin*, 95, 314.

CORDEAU, *école Lavoisier, à Paris* (reçu à l'École centrale), 60, 91, 95, 127, 221, 314, 315, 317.

CREVAUX, *à Charleville*, 319.

DEMARI, *à Moulins*, 57.

DEMORTAIN, *à Doullens*, 57.

DESLAIS, *lycée du Mans*, 93, 189, 192, 284, 286, 288, 314, 317, 378.

DETCHENIQUE, *à Mont-de-Marsan*, 219.

DOSTOR, *professeur à la Faculté catholique de Paris*, 17, 239, 263.

DUFRENOY, *directeur de l'école primaire supérieure d'Amiens*, 223.

DUMOTEL, *au lycée Saint-Louis, à Paris*, 286, 287, 380.

DUMUR, *à Chartres*, 317, 350, 378.

DUPUY, *à Grenoble*, 95, 190, 192, 219, 222, 288, 314, 319, 350.

ELIE, *collège Stanislas à Paris*, 220, 222, 287, 319, 348, 378, 383.

ETCHATS, *à Mont-de-Marsan*, 190.

FAIN, *au lycée Louis-le-Grand, à Paris*, 222.

FAIVRE, *à Lons-le-Saulnier*, 59, 95, 126, 219, 222, 287, 288, 314, 317, 350, 378.

FOISSEY, *à Dijon*, 219, 238, 315, 317, 319.

GÉLINET, *à Orléans*, 29, 60, 94, 95, 190, 192, 219, 287, 314, 317, 378.

GENIN, *à Charleville*, 94, 95.

GINDRE, *à Lons-le-Saulnier*, 59, 95, 126, 219, 222, 287, 288, 314, 317, 350, 378.
GINO LORIA, 374.
GLIN, *à Rouen*, 95.
GONDY, *à Pontarlier*, 219, 314.
HÉNON, *à Poitiers*, 313.
HOC, *à Longwy*, 95, 127, 219, 220, 222, 283, 286, 314, 383.
HUET, *à Orléans*, 60, 94, 95, 219.
HUGOT, *à Lyon*, 60, 220, 222, 287, 319, 350, 378, 383.
JACQUIER, *à Charleville*, 219, 317.
JACQUOT, *à Nancy*, 60.
JIMENEZ, *à Bordeaux*, 56.
JOHANNET, *à Châteauroux*, 190, 219, 314.
JOLY, *école Lavoisier, à Paris* (reçu à l'École centrale), 95.
JOUVENCEL, *à Caen*, 317.
JULLIARD, *maître-répétiteur au lycée de Rouen*, 62, 63, 159, 319.
JUNCK, *à Saint-Quentin*, 127.
KLISZOWSKI, *professeur à La Flèche*, 9.
KŒHLER, *rédacteur*, 225, 257, 289, 321, 354.
KŒNIGS, *lycée Saint-Louis, à Paris* (reçu à l'École normale supérieure), 308, 372.
LACHESNAIS, *à Versailles*, 222.
LACROIX, *à Saint-Étienne*, 94, 219.
LANDRE, *à La Flèche*, 219, 220, 222, 314, 319.
LANNES, *à Tarbes*, 127, 218, 287, 314, 317, 343, 350, 378, 383.
LAUNOY, *maître répétiteur au lycée de Lille*, 128, 160, 197.
LAURENCIE (de la), *à Nantes*, 59.
LECOQ, *professeur au lycée de Constantine*, 161.
LEGAY, *à Tarbes*, 94, 95.
LEMOINE (E.), *ancien élève de l'École polytechnique*, 21, 119.
LENORMAND, *à Rouen*, 219.
LEVY, *professeur au lycée de Rennes*, 350.
LIBMANN, *collège Stanislas, à Paris*, 317.
LIONNET, *ancien examinateur à l'école navale*, 193.
LONGCHAMPS (de), *professeur au collège Rollin, à Paris*, 61, 95, 96, 128, 223, 319.
LONGUEVILLE, *à Charleville*, 94, 219, 284, 319, 350, 378, 383.
MALLOIZEL, *professeur à l'école préparatoire de Sainte-Barbe*, 13, 365.
MANCEAU, *à Orléans*, 95, 127, 222, 317, 350.
MARCHAND, *à Loudun*, 190.
MARTIN, *à Passy*, 60, 314.
MELON (A.-G.), *professeur*, 82.
MIGNOT, 224.
MILLER, 320.
MIRMAN, *lycée Fontanes, à Paris*, 190.
MOLES, *à Angoulême*, 222, 287.
MOREL (A.), *rédacteur*, 3, 19, 22, 36, 86, 117, 137, 142, 182, 186, 294.
NOMY, *proviseur du lycée de Niort*, 224, 351.
OBJOIS, *à Moulins*, 60, 95, 190, 219.
OCAGNE (d'), *collège Chaptal, à Paris*, 33, 43, 60, 65, 93, 94, 97, 128, 190, 219, 275, 304, 370.
PASADOT, *à Poitiers*, 314.
PASQUIER, *à Bruxelles*, 317.
PAULME, *à Passy*, 60, 94, 190, 219.
PECQUERY, *au Havre*, 219.
PERRIN, *maître répétiteur au lycée de Clermont*, 61, 96.

PERROT, *à Angers*, 95.
PEYRABON, *à Châteauroux*, 190, 219, 220, 314, 317.
PILLET, *professeur à l'École polytechnique*, 70, 105, 151, 172, 212, 244.
PLET, *à Passy*, 190, 219.
PLOMET, *collège Stanislas, à Paris*, 94.
POMBARD, *à Charleville*, 219, 382.
RASPILAIRE, *à Saint-Étienne*, 94, 95, 127.
RENAUD, *à Bordeaux*, 288, 319.
REUSS, *à Belfort*, 50, 56, 57.
ROLLET, *à Saint-Quentin*, 219.
ROULLEAU, *à Orléans*, 94, 95.
SCHLESSER, *à Saint-Quentin*, 314.
SCHMITZ, *à la Rochelle*, 95, 287.
SÉRY, *à Pau*, 192, 314.
SONGAYLO, *professeur au collège Chaptal, examinateur à l'Ecole centrale*, 65, 97.
SOU, *à Libourne*, 55, 57, 59, 60, 93.
SUTER (le Dr Henri), *de Zurich*, 82.
TESSIER, *à Angers*, 94, 190, 219, 350, 383.
THUAL, *à Lorient*, 58, 60, 224, 251.
TISSIER, *à Angoulême*, 95, 127, 314, 317.
TRÉHORET, *au Havre*, 288.
VAZOU, *collège Rollin à Paris*, 219, 288, 315, 348, 350, 378, 379.
VERMAND, *à Saint-Quentin*, 94, 127, 190, 219, 222, 287, 314, 317, 350, 383.
VIGNEAU, *à Angoulême*, 95.
ZULOAGA, *Athénée de Liège*, 192, 219, 220, 222, 284, 317.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie,
RUE BERGÈRE, 20, A PARIS — 22262-9.